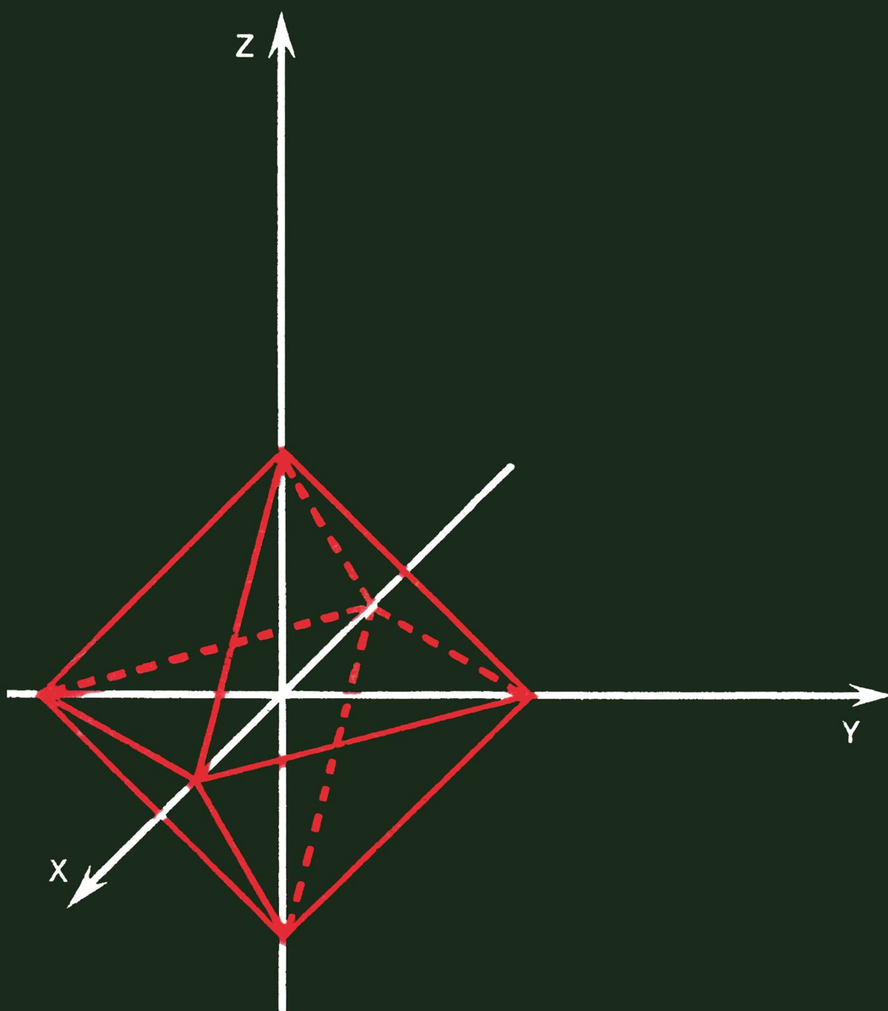
MATEMATIKA TECHNIKUMAMS

geometrija



MATEMATIKA TECHNIKUMAMS

geometrija

TSRS aukštojo ir specialiojo vidurinio mokslo ministerijos patvirtintas vadovėlis specialiosioms vidurinėms mokykloms



VILNIUS
„MOKSLAS“
1981

Autorių kolektyvas:

M. Kačenovskis, J. Koliaginas, A. Kutasovas, G. Lukankinas, V. Oganesianas, G. Jakovlevas

Rusiškojo leidimo redaktorius *G. Jakovlevas*

Vertė *R. Kašuba* ir *P. Vaškas*

4306020402

G $\frac{20201-136}{M\,854(08)-81}$ 32–81

TURINYS

Pratarmė 5

I dalis. I skyrius. Vektoriai plokštumoje ir erdvėje 6

§ 1. Pagrindinės sąvokos ir apibrėžimai 6
§ 2. Lygiagretusis postūmis (vektorius) plokštumoje ir erdvėje 8
§ 3. Vektorių suma 9
§ 4. Vektorių sudėties komutatyvumas 12
§ 5. Vektorių sudėties asociatyvumas 13
§ 6. Priešingieji vektoriai. Vektorių atimtis 14
§ 7. Vektoriaus daugyba iš skaičiaus 15
§ 8. Kolinearieji vektoriai 16
§ 9. Vektoriaus projekcija ašyje 17
§ 10. Kampas tarp dviejų vektorių 19
§ 11. Vektoriaus skaidymas plokštumoje dviem nekolineariais vektoriais 20
§ 12. Komplanarūs vektoriai 22
§ 13. Vektoriaus skaidymas trimis nekomplanariais vektoriais .. 23
§ 14. Veiksmai su vektoriais, duotais koordinatėmis 24
§ 15. Dekarto koordinačių sistema 25
§ 16. Polinė koordinačių sistema 28
§ 17. Atkarpos ilgis stačiakampėje koordinačių sistemoje 29
§ 18. Vektoriaus ilgis stačiakampėje koordinačių sistemoje .. 31
§ 19. Dviejų vektorių skaliarinė sandauga 32
§ 20. Vektorių skaliarinės sandaugos savybės 33
§ 21. Vektorių, duotų koordinatėmis, skaliarinė sandauga 34
§ 22. Kampas tarp dviejų vektorių 35
§ 23. Atkarpos dalijimas duotuoju santykiu 36
§ 24. Trijų taškų priklausymo vienai tiesei sąlyga 37
§ 25. Geometrinių uždavinių sprendimo vektoriniu metodu pavyzdžiai 39
§ 26. Dviejų vektorių vektorinė sandauga ir jos savybės 45
§ 27. Vektorių, duotų koordinatėmis, vektorinė sandauga 47
I skyriaus uždaviniai 48

II skyrius. Tiesė 52

§ 28. Lygtis su dviem nežinomaisiais ir jos grafikas 52
§ 29. Tiesė ir jos lygtis 53
§ 30. Tiesės parametrinės lygtys 56
§ 31. Lygtis tiesės, einančios per duotąjį tašką statmenai duotajam vektoriui 57
§ 32. Tiesės bendroji lygtis 59
§ 33. Tiesės bendrosios lygties tyrimas 59
§ 34. Tiesės, einančios per du taškus, lygtis 62
§ 35. Tiesės ašinė lygtis 63
§ 36. Tiesės krypties koeficientas. Lygtis tiesės, einančios per duotąjį tašką duotąja kryptimi .. 65
§ 37. Kampo tarp tiesių radimas 67
§ 38. Tiesės normalinė lygtis .. 70
§ 39. Atstumas tarp taško ir tiesės 71
§ 40. Dviejų tiesių susikirtimo taškas 72
§ 41. Tiesės polinė lygtis 72
II skyriaus uždaviniai 73

III skyrius. Antrosios eilės kreivės 76
§ 42. Apskritimas 77
§ 43. Stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos transformacijos 80
§ 44. Elipsė 83
§ 45. Elipsės formos tyrimas, naudojantis elipsės lygtimi 86
§ 46. Elipsės ekscentricitetas .. 89
§ 47. Elipsės brėžimas 90

§ 48. Elipsės parametrinės lygtys 91
§ 49. Elipsė kaip apskritimo projekcija plokštumoje 92
§ 50. Elipsė kaip apskritimas, suspaustas skersmens atžvilgiu .. 93
§ 51. Hiperbolė 94
§ 52. Hiperbolės formos tyrimas, remiantis jos lygtimi 96
§ 53. Hiperbolės ekscentricitetas 100
§ 54. Hiperbolės brėžimas 100
§ 55. Lygiaašė hiperbolė ir jos lygtis. Lygiaašės hiperbolės asimptotinė lygtis 101
§ 56. Parabolė 104
§ 57. Parabolės lygties tyrimas .. 105
§ 58. Parabolės brėžimas 107
§ 59. Parabolės lygiagretusis postūmis 107
§ 60. Antrosios eilės kreivės lygtis — atskiras dviejų kintamųjų antrojo laipsnio lygties atvejis 109
III skyriaus uždaviniai 110

2 dalis. I skyrius. Tiesės ir plokštumos erdvėje 115

§ 1. Trijų vektorių mišrioji sandauga 115
§ 2. Tiesės lygtys 117
§ 3. Plokštumos lygtys 121
§ 4. Bendroji plokštumos lygtis 124
§ 5. Lygiagrečios plokštumos 125
§ 6. Susikertančios plokštumos .. 128
§ 7. Kampas tarp dviejų plokštumų. Statmenosios plokštumos .. 130
§ 8. Lygiagrečios tiesės 131
§ 9. Susikertančios ir prasilenkiančios tiesės 132
§ 10. Kampas tarp tiesių. Statmenosios tiesės 134
§ 11. Erdvės tiesių tarpusavio padėties uždaviniai 136
§ 12. Tiesės ir plokštumos lygiagretumas 138
§ 13. Tiesės ir plokštumos kirtimasis. Kampas tarp tiesės ir plokštumos 140
§ 14. Tiesės ir plokštumos statmenumas 142
§ 15. Statmenųjų plokštumų teoremos 144
§ 16. Tiesių ir plokštumų lygiagretumo ryšys su statmenumu 145
§ 17. Statmuo ir pasviroji plokštumai 147
§ 18. Atstumas nuo taško iki plokštumos 149
§ 19. Figūros statmenoji projekcija 151
§ 20. Erdvinių figūrų vaizdavimas 154
§ 21. Daugiakampio projekcijos plotas 157
I skyriaus uždaviniai 158

II skyrius. Briaunainiai 163

§ 22. Pusplokštumė. Puserdvė. Dvisieniai ir daugiasieniai kampai 163
§ 23. Trisienių ir daugiasienių kampų plokščiųjų kampų savybės 166
§ 24. Prizmė 168
§ 25. Piramidė ir nupjautinė piramidė 170
§ 26. Briaunainiai 174
§ 27. Taisyklingieji briaunainiai 174
II skyriaus uždaviniai 177

III skyrius. Paprasčiausi kreivieji paviršiai ir sukiniai 178

§ 28. Sfera ir rutulys 178
§ 29. Plokštumos ir sferos tarpusavio padėtis 180
§ 30. Sukimosi paviršiai 181
§ 31. Cilindriniai paviršiai 184
§ 32. Kūginiai paviršiai 189
§ 33. Kūgis ir nupjautinis kūgis 190
§ 34. Cilindras 191
III skyriaus uždaviniai 192

IV skyrius. Kūnų tūriai ir paviršių plotai 194

§ 35. Briaunainio tūrio sąvoka. Gretasienio tūris 194
§ 36. Stačiosios prizmės tūris .. 196
§ 37. Kūno tūrio sąvoka. Stačiojo cilindro tūris 197
§ 38. Kūno tūrio reiškimas jo lygiagrečių pjūvių plotais 198
§ 39. Sukinio tūris 200
§ 40. Pasvirosios prizmės ir pasvirojo cilindro tūris 203
§ 41. Piramidės ir nupjautinės piramidės tūris 203
§ 42. Kūgio ir nupjautinio kūgio tūris 205
§ 43. Rutulio ir jo dalių tūris .. 206
§ 44. Ritinio, kūgio ir nupjautinio kūgio paviršiaus plotas .. 209
§ 45. Sukimosi paviršiaus plotas 210
§ 46. Sferos ir jos dalių plotas .. 212
IV skyriaus uždaviniai 213

Atsakymai 220
Vartojamų simbolių rodyklė 228
Dalykinė rodyklė 229

PRATARMĖ

Šis geometrijos vadovėlis atitinka naują specialiųjų vidurinių mokyklų matematikos programą. Jis susideda iš dviejų dalių. Pirmoje dalyje nagrinėjami vektoriai plokštumoje ir erdvėje, jų savybės, veiksmai, taip pat tiesė ir antrosios eilės kreivės: apskritimas, elipsė, hiperbolė ir parabolė. Antroje dalyje nagrinėjamos tiesių ir plokštumų lygtys, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtis, briaunainių ir apvaliųjų kūnų bei jų paviršių savybės. Paskutiniame skyriuje išdėstyti tūrių ir plotų teorijos elementai.

Išdėsčius teorinę medžiagą, nagrinėjami uždaviniai. Kiekvieno skyriaus pabaigoje pateikta uždavinių moksleivių savarankiškam darbui.

Dėstant teorinę medžiagą ir sprendžiant uždavinius, daugiausia dėmesio skiriama konstruktyvinei daliai. Kai tik įmanoma, nagrinėjamas geometrinis objektas apibūdinamas lygtimis arba pateikiamas konkretus jo konstravimo būdas. Autoriai mano, kad toks matematikos dėstymas technikumuose labiau atitinka praktikos poreikius.

Autoriai nuoširdžiai dėkoja TSRS Pedagogikos mokslų akademijos nariui korespondentui prof. J. Brovikovui, doc. P. Apanasovui ir TSRS aukštojo ir specialiojo vidurinio mokslo ministerijos metodininkui P. Samoilenkai, atidžiai perskaičiusiems rankraštį ir pateikusiems vertingų pastabų.

Autoriai

I DALIS I SKYRIUS

Vektoriai plokštumoje ir erdvėje

§ 1. PAGRINDINĖS SĄVOKOS IR APIBRĖŽIMAI

VI—VIII klasių geometrijos kurse susipažinome su plokštumos atvaizdžiais į tą pačią plokštumą. Tarp kitų atvaizdžių buvo išskirti plokštumos atvaizdžiai į tą pačią plokštumą, nekeičiant atstumų. Tokie atvaizdžiai, vadinami *poslinkiais*, yra posūkis, ašinė ir centrinė simetrija, lygiagretusis postūmis.

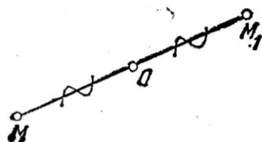
Posūkiu apie centrą O vadinamas toks plokštumos poslinkis, kai: 1) taškas O atvaizduojamas į jį patį, 2) kampas tarp bet kurio spindulio Ox ir jį atitinkančio spindulio Ox_1 yra to paties didumo α. Kai posūkio kampas lygus 0°, visi plokštumos taškai lieka vietoje (kiekvienas taškas atvaizduojamas į tą patį tašką); toks atvaizdis vadinamas *tapačiuoju.*

Taškai M ir M_1 vadinami *simetriškais centro O atžvilgiu,* jeigu O yra atkarpos MM_1 vidurio taškas (1 pav.). Centras O laikomas sau simetrišku.

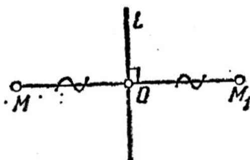
Plokštumos atvaizdis į ją pačią, kai kiekvienas taškas atvaizduojamas į jam simetrišką centro O atžvilgiu tašką, vadinamas *simetrija centro O atžvilgiu.*

Taškai M ir M_1 vadinami *simetriškais tiesės l atžvilgiu,* jeigu l yra statmena atkarpai MM_1 ir dalija ją pusiau. Kiekvienas tiesės l taškas laikomas sau simetrišku (2 pav.).

Ašine simetrija ašies l atžvilgiu vadinamas toks plokštumos poslinkis, kai kiekvienas taškas atvaizduojamas į jam simetrišką tašką duotosios tiesės l atžvilgiu. Tiesė l vadinama *simetrijos ašimi.*



1 pav.



2 pav.

Lygiagrečiuoju postūmiu vadinamas plokštumos atvaizdis į ją pačią, kai visi plokštumos taškai pastumiami ta pačia kryptimi ir tuo pačiu atstumu.

VI—VIII klasių geometrijos kurse buvo įrodyta, kad lygiagretusis postūmis yra poslinkis.

Lygiagretųjį postūmį nuliniu atstumu galima nagrinėti kaip tapatųjį plokštumos atvaizdį į ją pačią. Tapatusis plokštumos atvaizdis į ją pačią yra vienintelis poslinkis, kuris kartu yra ir posūkis, ir lygiagretusis postūmis.

Priminsime, kad geometrijos kurse lygiagretusis postūmis buvo pavadintas *vektoriumi.* Kadangi vektoriaus sąvoka yra viena svarbiausių matematikos sąvokų, plačiai taikomų įvairiose matematikos, fizikos ir technikos srityse, tai nagrinėsime ją smulkiau. Prieš tai apibrėšime erdvės transformaciją.

Apibrėžimas. Erdvės atvaizdis į tą pačią erdvę, kai bet kokie du skirtingi taškai atvaizduojami į skirtingus taškus, vadinamas *erdvės transformacija.*

Erdvės transformacijos sąvoka analogiška plokštumos atvaizdžio į ją pačią sąvokai. Taip pat, kaip ir plokštumoje, apibrėžiama centrinė simetrija, ašinė simetrija ir lygiagretusis postūmis (vektorius).

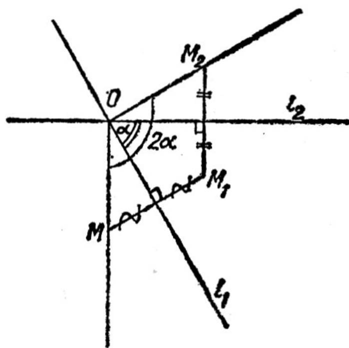
Laisvai pasirinkta erdvės transformacija žymima raide f. Užrašas $f(A)=$ $=B$ reiškia, kad transformacija f tašką A atvaizduoja į tašką B.

Sakykime, duotos dvi figūros T_1 ir T_2. Užrašas $f(T_1)=T_2$ reiškia, kad transformacija f figūrą T_1 atvaizduoja į figūrą T_2.

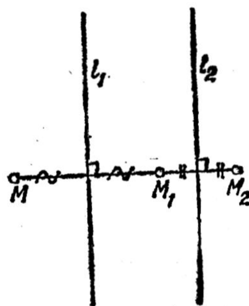
Transformacija, atvaizduojanti kiekvieną erdvės tašką į tą patį tašką, vadinama *tapačiąja transformacija* ir žymima raide E.

Vadinasi, $E(A)=A$, A — bet koks erdvės taškas. Iš eilės atlikę transformacijas f_1 ir f_2, gauname transformaciją f, vadinamą *transformacijų* f_1 *ir* f_2 *kompozicija.* Transformacijų kompozicija žymima $f_2 \circ f_1$.

Atkreipkite dėmesį į užrašymo tvarką: simbolyje $f_2 \circ f_1$ iš dešinės rašoma pirmiau atliekama transformacija. Transformacijų f_1 ir f_2 kompoziciją galima žymėti ir kitaip. Sakykime, $f_1(A)=B$ ir $f_2(B)=C$, A — bet koks erdvės taškas. Tada transformacijų f_1 ir f_2 kompoziciją galima užrašyti šitaip: $f_2\big(f_1(A)\big)=C$.



3 pav.



4 pav.

Pateiksime du transformacijų kompozicijos pavyzdžius:

a) dviejų ašinių simetrijų, kurių ašys sudaro kampą α, kompozicija yra posūkis apie centrą O kampu 2α (3 pav.),

b) dviejų ašinių simetrijų, kurių ašys lygiagrečios, kompozicija (4 pav.) yra lygiagretusis postūmis (vektorius).

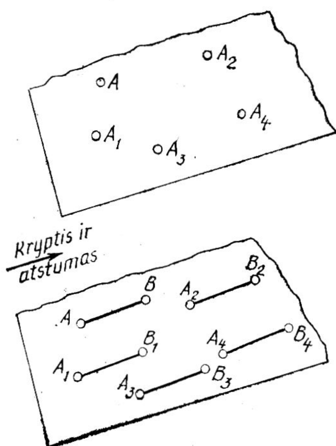
Sakykime, f yra erdvės transformacija. Transformacija f^{-1} vadinama atvirkštine transformacijai f, kai $f^{-1} \circ f=E$.

Taigi, jeigu f yra erdvės transformacija ir f^{-1} – jai atvirkštinė transformacija, tai $f^{-1}(f(A))=A$, imant kiekvieną erdvės tašką A.

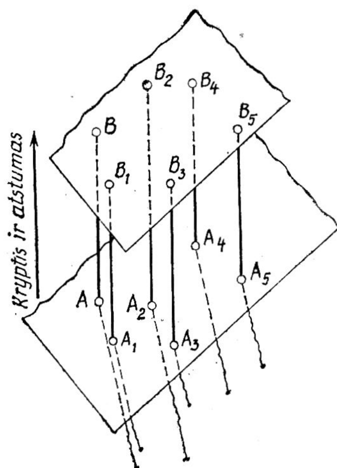
Pavyzdžiui, plokštumos homotetijai f, kurios centras O ir koeficientas k, atvirkštinė transformacija irgi bus homotetija, kurios centras tas pats taškas O ir koeficientas $1/k$: $H_O^{1/k}(H_O^k(A))=A$, A – bet koks erdvės taškas.

§ 2. LYGIAGRETUSIS POSTŪMIS (VEKTORIUS) PLOKŠTUMOJE IR ERDVĖJE

Aprašysime lygiagrečiojo postūmio modelį. Sakykime, turime dvi plokšteles, viena būtinai turi būti skaidri (iš organinio stiklo). Kiekvieną tų plokštelių galima laikyti plokštumos modeliu. Suglaustos jos taip pat modeliuoja plokštumą. Suglauskime plokšteles taip, kad skaidrioji būtų viršuje. Joje bet kaip pažymėkime keletą taškų ir juose pragręžkime abi plokšteles. Pro kiekvieną skylutę praverkime siūlą. Viršutinį jo galą suriškime mazgu, o prie apatinio galo pririškime svarelį. Modelis paruoštas (5 pav.).



5 pav.



6 pav.

Dabar stumdysime viršutinę plokštelę įvairiomis kryptimis. Įtempti siūlai rodys taškų nueitą kelią. Modelyje matome, kad visi taškai slinko kongruenčiomis vienos krypties atkarpomis.

Tuo pačiu modeliu galima naudotis ir nagrinėjant lygiagretųjį postūmį erdvėje, tik apatinę plokštelę reikia įtvirtinti (arba palaikyti), o viršutinę pakelti ir stumdyti įvairiomis kryptimis, lygiagrečiomis apatinei plokštelei.

Apibrėžimas. *Vektoriumi* (*lygiagrečiuoju postūmiu*), apibrėžiamu skirtingų taškų pora (A; B), vadinama erdvės transformacija, taip atvaizduojanti kiekvieną tašką A_1 į tašką B_1, kad spindulys A_1B_1 yra tos pačios krypties, kaip ir spindulys AB, o atstumas A_1B_1 lygus atstumui AB.

Vektorius žymimas simboliu $\overrightarrow{AB}$ arba simboliais **a**, **b**, **c** ir t. t.

Kadangi vektorius $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ yra erdvės transformacija, atvaizduojanti tašką A į tašką B, tai rašoma $\mathbf{a}(A)=B$.

Spindulio AB nustatyta kryptis vadinama *vektoriaus* $\overrightarrow{AB}$ *kryptimi*, o atstumas AB – *vektoriaus* $\overrightarrow{AB}$ *ilgiu*. Vektoriaus $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ ilgis žymimas simboliu $|\mathbf{a}|=|\overrightarrow{AB}|$.

Vektorius, apibrėžiantis tapačiąją transformaciją, vadinamas *nuliniu vektoriumi* ir žymimas $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ arba **0**. Nulinio vektoriaus ilgis lygus nuliui, kryptis neapibrėžta.

Kiekvienas vektorius $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ yra visiškai apibrėžtas, jeigu žinoma jo kryptis ir ilgis.

Paveiksle vektorius $\overrightarrow{AB}$ paprastai vaizduojamas tiesės atkarpa AB, kurios pradžia yra taškas A ir galas – taškas B. Tokia atkarpa vadinama *kryptine atkarpa*. Aišku, yra be galo daug kryptinių atkarpų, vaizduojančių vieną ir tą patį vektorių. 6 paveiksle kryptinės atkarpos AB, A_1B_1, A_2B_2 vaizduoja tą patį vektorių: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}=\ldots$

Nubrėžti kryptinę atkarpą AB, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, – tai reiškia nubrėžti vektorių **a**, išeinantį iš taško A.

Be įrodymo pateiksime šias erdvės vektorių savybes:

1) vektorius yra poslinkis,

2) vektorius atvaizduoja spindulį į tos pačios krypties spindulį (vadinasi, tiesę į jai lygiagrečią tiesę),

3) vektorius atvaizduoja plokštumą į jai lygiagrečią plokštumą.

Fizikoje vektoriais (dažniausiai kryptinėmis atkarpomis) vaizduojami įvairūs *kryptiniai dydžiai*: jėga, greitis, pagreitis ir t. t. Dažnai toks kryptinis dydis yra susietas su konkrečiu erdvės tašku. Pavyzdžiui, jėga tampriai susieta su jos veikimo tašku. Norint apibūdinti jėgą, reikia žinoti jos didumą, kryptį bei veikimo tašką. Tokie dydžiai vaizduojami vadinamaisiais *vietos vektoriais* (tai vektoriai, kurių pradžia yra fiksuota).

§ 3. VEKTORIŲ SUMA

Pirmiausia pateiksime teoremą, kuria remdamiesi apibrėšime dviejų vektorių sumos sąvoką.

Teorema. *Dviejų vektorių kompozicija yra vektorius.*

□ Sakykime, duoti du vektoriai **a** ir **b**. Imkime bet kokius du taškus M ir N. Vektorius **a** atvaizduoja tašką M į tašką $\mathbf{a}(M)=M_1$, o tašką N – į tašką $\mathbf{a}(N)=N_1$. Vektorius **b** atvaizduoja tašką M_1 į tašką $\mathbf{b}(M_1)=M_2$, o tašką N_1 – į tašką $\mathbf{b}(N_1)=N_2$ (7 pav.). Tada kompozicija $\mathbf{b}\circ\mathbf{a}$ atvaizduoja taškus M ir N atitinkamai į taškus M_2 ir N_2.

Vektorius – tai poslinkis, todėl

$$|MN| = |M_1N_1| = |M_2N_2|. \qquad (1)$$

Be to, vektorius spindulį atvaizduoja į tos pačios krypties spindulį, todėl $[MN) \uparrow\uparrow [M_1N_1)$ ir $[M_1N_1) \uparrow\uparrow [M_2N_2)$.

Remdamiesi tranzityvumo savybe, gauname

$$[MN) \uparrow\uparrow [M_2N_2). \qquad (2)$$

Iš (1) ir (2) sąryšių išplaukia, kad atkarpa NN_2 gaunama iš atkarpos MM_2 lygiagrečiu postūmiu. Todėl

$$|NN_2| = |MM_2|,$$

$$[NN_2) \uparrow\uparrow [MM_2). \qquad (3)$$

7 pav.

Kadangi M ir N – bet kokie erdvės taškai, tai įrodėme, kad kompozicija $\mathbf{b} \circ \mathbf{a}$ yra vektorius. ■

Apibrėžimas. Dviejų vektorių **a** ir **b** kompozicija vadinama vektorių **a** ir **b** *suma* ir žymima $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

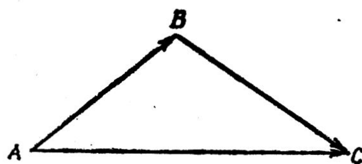
Vadinasi, remiantis apibrėžimu,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}.$$

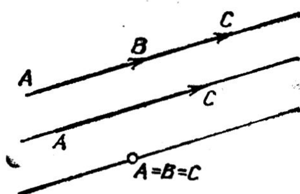
Sakykime, duoti bet kokie trys taškai A, B ir C (8 pav.). Remiantis dviejų vektorių kompozicijos teorema, galima užrašyti lygybę

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}. \qquad (4)$$

□ Iš tikrųjų, vektorius $\vec{AB}$ atvaizduoja tašką A į tašką B, vektorius $\vec{BC}$ atvaizduoja tašką B į tašką C, o tų vektorių kompozicija $\vec{BC} \circ \vec{AB}$ atvaizduoja tašką A į tašką C. ■



8 pav.

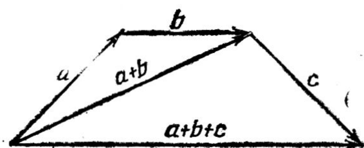


9 pav.

(4) lygybė vadinama *trijų taškų taisykle*, arba *trikampio taisykle*. Trikampio taisyklė teisinga ir tada, kai visi taškai yra vienoje tiesėje ar netgi sutampa (9 pav.).

Aišku, $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

Norint pavaizduoti vektorių **a** ir **b** sumą, reikia pasirinkti bet kokį tašką A ir nubrėžti vektorius $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ taip, kad pirmojo vektoriaus galas B sutaptų su antrojo vektoriaus pradžia. Tada kryptinė atkarpa AC vaizduos vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BC}$ sumą:



10 pav.

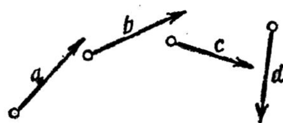
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}.$$

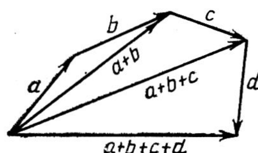
Apibrėžimas. *Trijų vektorių* **a**, **b** *ir* **c** *suma* vadinamas vektorius, gautas prie vektorių **a** ir **b** sumos pridėjus vektorių **c**.

Vadinasi, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$.

Analogiškai apibrėžiama keturių vektorių suma: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{d}$ ir t. t.

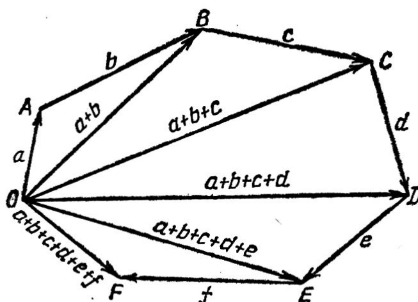
10 ir 11 paveiksluose parodyta, kaip nubrėžti kryptines atkarpas, vaizduojančias atitinkamai trijų bei keturių vektorių sumą.



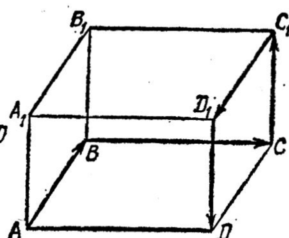


11 pav.

Apskritai, kai reikia nubrėžti kryptinę atkarpą, vaizduojančią trijų ar daugiau vektorių sumą, taikoma vadinamoji „daugiakampio taisyklė“. Jos esmė yra šitokia. Norint pavaizduoti vektorių **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** sumą, reikia iš



12 pav.



13 pav.

bet kurio erdvės taško O nubrėžti kryptinę atkarpą OA, vaizduojančią vektorių **a**, iš tos atkarpos galo (taško A) nubrėžti atkarpą AB, vaizduojančią vektorių **b**, ir t. t. Paskutinė gautosios laužtės kryptinė atkarpa OF vaizduos sumos vektorių (12 pav.).

Uždavinys. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Reikia rasti vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$ sumą.

△ Pritaikę daugiakampio taisyklę, gauname (13 pav.)

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1D}=\overrightarrow{AD}.\ \blacktriangle$$

§ 4. VEKTORIŲ SUDĖTIES KOMUTATYVUMAS

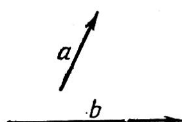
Teorema. *Vektorių sudėtis yra komutatyvi, t. y. bet kuriems vektoriams* **a** *ir* **b** *galioja lygybė*

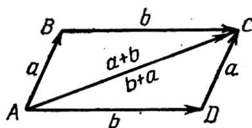
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}. \qquad (1)$$

□ Sakykime, duoti du vektoriai **a** ir **b**. Iš bet kokio taško A nubrėžkime vektorių $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$; po to iš taško B nubrėžkime vektorių $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$. Sakykime, taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje. Tada, remiantis dviejų vektorių sumos apibrėžimu,

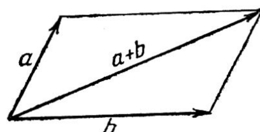
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}. \qquad (2)$$

Trikampį ABC papildome iki lygiagretainio $ABCD$, trikampio kraštinę AC laikydami lygiagretainio įstrižaine (14 pav.). Tada $|AB|=|DC|$ ir $(AB)\parallel(DC)$; be to, $|AD|=|BC|$ ir $(AD)\parallel(BC)$, nes tai yra priešingos lygiagretainio kraštinės. Vadinasi, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$.





14 pav.



15 pav.

Dabar vektorių $\overrightarrow{AC}$ galima laikyti vektorių $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ ir $\overrightarrow{DC}=\mathbf{a}$ suma, t. y.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{b}+\mathbf{a}. \qquad (3)$$

Iš (2) ir (3) lygybių išplaukia (1) lygybė. ■

Tuo atveju, kai taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, teoremą įrodykite savarankiškai.

Vektorių sudėtis komutatyvi ir tada, kai yra trys ir daugiau dėmenų.

Remiantis vektorių sudėties komutatyvumu, dviejų vektorių suma galima laikyti įstrižainę lygiagretainio, kurio kraštinės yra duotuosius vektorius vaizduojančios kryptinės atkarpos, išeinančios iš bendro pradžios taško (15 pav.).

Uždavinys. Reikia rasti sumą $\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{CK}$.

Pritaikę vektorių sudėties komutatyvumo taisyklę, gauname $\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{MC}+$ $+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CK}$.

Pagal daugiakampio taisyklę

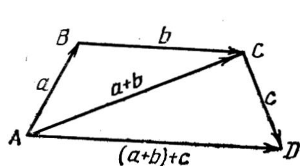
$$\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{KK}=\mathbf{0}. \ \blacktriangle$$

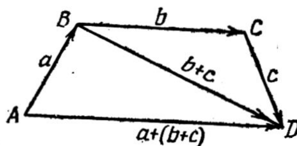
§ 5. VEKTORIŲ SUDĖTIES ASOCIATYVUMAS

Teorema. *Vektorių sudėtis yra asociatyvi, t. y. bet kuriems trims vektoriams* **a**, **b** *ir* **c** *teisinga lygybė*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}). \tag{1}$$

□ Iš bet kokio laisvai pasirinkto taško A brėžiame vektorių $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, iš taško B – vektorių $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, o iš taško C – vektorių $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$ (16 pav.). Tarkime, kad iš taškų A, B, C ir D jokie trys taškai nėra vienoje tiesėje. Taškus A ir D sujunkime atkarpa AD.





16 pav.

17 pav.

Pritaikę vektorių sudėties bei trikampio taisyklę, kairiąją (1) lygybės pusę užrašysime šitaip:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}, \tag{2}$$

o dešiniojoje lygybės pusėje turėsime

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}. \tag{3}$$

Iš (2) ir (3) išplaukia įrodinėjamoji (1) lygybė. ■

Tuo atveju, kai taškai A, B, C ir D išsidėstę kitaip, teoremą įrodykite savarankiškai.

Teorema teisinga, esant bet kokiam dėmenų skaičiui.

Uždavinys. Duota trikampė piramidė $ABCD$. Reikia rasti $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+$ $+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$.

△ Remdamiesi vektorių sudėties komutatyvumu bei asociatyvumu, gauname (17 pav.)

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=$$

$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}. \ \blacktriangle$$

§ 6. PRIEŠINGIEJI VEKTORIAI. VEKTORIŲ ATIMTIS

Akivaizdu, kad vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$ suma yra nulinis vektorius.

Apibrėžimas. Bet kokie du vektoriai, kurių suma yra nulinis vektorius, vadinami *priešingaisiais.*

Vektorius, priešingas vektoriui **a**, žymimas **−a**. Vadinasi, pagal apibrėžimą

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}.$$

Iš apibrėžimo išplaukia, kad priešingieji vektoriai yra vienodo ilgio ir priešingų krypčių.

Apibrėžimas. Dviejų vektorių **a** ir **b** *skirtumu* vadinamas vektorius $\mathbf{c}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

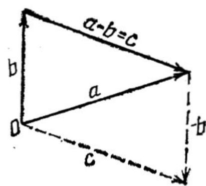
Vektorių **a** ir **b** skirtumas žymimas $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Vadinasi, pagal apibrėžimą $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

Aišku, jeigu $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, tai $\mathbf{c}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$.

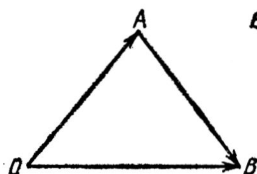
□ Iš tikrųjų (18 pav.), remdamiesi vektorių skirtumo apibrėžimu bei vektorių sudėties savybėmis, gauname

$$\mathbf{c}+\mathbf{b}=(\mathbf{a}+(-\mathbf{b}))+\mathbf{b}=\mathbf{a}+((-\mathbf{b})+\mathbf{b})=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}. \blacksquare$$

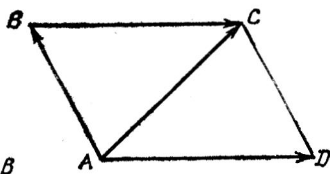
Teisingas ir atvirkštinis teiginys: jeigu $\mathbf{c}+\mathbf{b}=\mathbf{a}$, tai $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$.



18 pav.



19 pav.



20 pav.

Nagrinėsime bet kokius tris taškus A, B ir O. Remiantis vektorių skirtumo apibrėžimu, skirtumas $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ lygus $\overrightarrow{AB}$ (19 pav.):

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}.$$

Pastaroji lygybė dažnai vadinama vektorių skirtumo formule. Nesunku pastebėti, kad ją galima taikyti ir be brėžinio; pakanka tik žinoti raidžių išsidėstymo tvarką duotųjų bei gautojo vektoriaus užrašuose. Pavyzdžiui,

$$\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NQ}.$$

Uždavinys. Duotas keturkampis $ABCD$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Reikia įrodyti, kad $ABCD$ yra lygiagretainis.

△Išnagrinėkime 20 paveikslą. Remiantis vektorių skirtumo formule, $\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{BC}$. Iš sąlygos $\vec{AC}-\vec{AB}=\vec{AD}$. Vadinasi, $\vec{BC}=\vec{AD}$. Tačiau tada $|BC|=|AD|$ ir $(BC)\|(AD)$. Remiantis lygiagretainio požymiu, $ABCD$ yra lygiagretainis. ▲

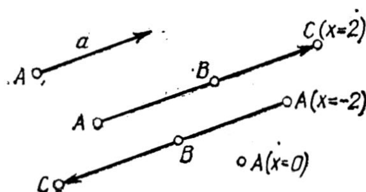
§ 7. VEKTORIAUS DAUGYBA IŠ SKAIČIAUS

Išnagrinėsime dar vieną operaciją su vektoriais – vektoriaus daugybą iš skaičiaus.

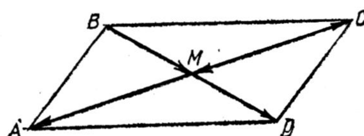
Apibrėžimas. Nenulinio vektoriaus **a** ir skaičiaus $x \neq 0$ *sandauga* vadinamas vektorius, kurio ilgis lygus $|x| \cdot |\mathbf{a}|$, kryptis sutampa su vektoriaus **a** kryptimi, kai $x>0$, ir yra priešinga vektoriaus **a** krypčiai, kai $x<0$.

Nulinio vektoriaus ir bet kokio skaičiaus x sandauga, taip pat bet kokio vektoriaus ir skaičiaus 0 sandauga yra nulinis vektorius.

Vektoriaus **a** ir skaičiaus x sandauga žymima $x \cdot \mathbf{a}$ (skaičius rašomas kairėje pusėje). Pagal apibrėžimą $|x \cdot \mathbf{a}|=|x| \cdot |\mathbf{a}|$, kai **a** – bet koks vektorius, x – bet koks skaičius. 21 paveiksle pavaizduota vektoriaus **a** ir skaičių 2; -2; 0 sandaugos.



21 pav.



22 pav.

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus pasižymi šiomis savybėmis:

1. Asociatyvumo (jungiamumo) savybe:

$$x \cdot (y \cdot \mathbf{a})=(x \cdot y) \cdot \mathbf{a};$$

2. Distributyvumo (skirstomumo) savybe vektorinio daugiklio atžvilgiu:

$$x \cdot \mathbf{a}+y \cdot \mathbf{a}=(x+y)\,\mathbf{a} \cdot;$$

3. Distributyvumo savybe skaitinio daugiklio atžvilgiu:

$$x \cdot \mathbf{a}+x \cdot \mathbf{b}=x \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

Vektoriaus daugybos iš skaičiaus savybes pateikiame be įrodymo (jis analogiškas tokių pat savybių įrodymui, žinomam iš planimetrijos kurso).

Uždavinys. Taškas M yra lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo taškas. Reikia rasti daugiklį k, kai: 1) $\vec{MC}=k \cdot \vec{CA}$; 2) $\vec{BD}=k \cdot \vec{BM}$; 3) $\vec{AC}=$ $=k \cdot \vec{CM}$; 4) $\vec{BB}=k \cdot \vec{BD}$; 5) $\vec{AA}=k \cdot \vec{CC}$.

△ Remdamiesi vektoriaus daugybos iš skaičiaus apibrėžimu, gauname (22 pav.)

1) $\vec{CA} \neq \mathbf{0}$, $\vec{MC} \uparrow\downarrow \vec{CA}$, $|CA| = 2|MC|$, todėl $k = -1/2$;

2) $\vec{BM} \neq \mathbf{0}$, $\vec{BM} \uparrow\uparrow \vec{BD}$, $|BD| = 2|BM|$, todėl $k = 2$;

3) $\vec{CM} \neq \mathbf{0}$, $\vec{CM} \uparrow\downarrow \vec{AC}$, $|CM| = \frac{1}{2}|AC|$, todėl $k = -2$;

4) $\vec{BB} = \mathbf{0}$, $\vec{BD} \neq \mathbf{0}$, todėl $k = 0$;

5) $\vec{AA} = \mathbf{0}$, $\vec{CC} = \mathbf{0}$, todėl k – bet koks skaičius. ▲

§ 8. KOLINEARIEJI VEKTORIAI

Apibrėžimas. Du nenuliniai vektoriai, kurių kryptys sutampa arba yra priešingos, vadinami *kolineariaisiais.*

Pavyzdžiui, 16 paveiksle pavaizduoti vektoriai $\vec{BC}$ ir $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ ir $\vec{DA}$ yra kolinearūs, o vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{CD}$, $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ nėra kolinearūs.

Jeigu vektoriai **a** ir **b** yra kolinearūs, tai dar sakoma, kad vektorius **a** kolinearus vektoriui **b**, o vektorius **b** kolinearus vektoriui **a**.

Pagal apibrėžimą nulinis vektorius kolinearus bet kokiam vektoriui.

Teorema. *Vektorius* **a** *yra kolinearus nenuliniam vektoriui* **b** *tada ir tik tada, kai egzistuoja skaičius k, tenkinantis sąlygą*

$$\mathbf{a} = k\mathbf{b}. \tag{1}$$

□ Sąlygos pakankamumas aiškus. Iš tikrųjų, jeigu su duotuoju k yra teisinga (1) lygybė, tai vektoriai yra kolinearūs, remiantis vektoriaus daugybos iš skaičiaus ir vektorių kolinearumo apibrėžimais.

Būtinumas. Sakykime, vektorius **a** yra kolinearus nenuliniam vektoriui **b**. Galimi šie trys atvejai:

$$\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \downarrow\uparrow \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Jeigu $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, tai $\mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} \cdot \mathbf{b}$, t. y. $k = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

Jeigu $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, tai $\mathbf{a} = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} \cdot \mathbf{b}$, t. y. $k = -\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$.

Jeigu $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, tai $\mathbf{a} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{b}$, t. y. $k = 0$.

Būtinumas įrodytas.

Įrodysime, jog skaičius k yra vienintelis.

□ Sakykime, egzistuoja du skaičiai k ir k_1, tenkinantys sąlygą $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ ir $\mathbf{a} = k_1\mathbf{b}$. Tada $k\mathbf{b} - k_1\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ir, vadinasi, $(k - k_1)\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Kadangi $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, tai $k = k_1$. ■

Uždavinys. Reikia įrodyti, kad vektoriai $\vec{AB} + \vec{CB} + 2\vec{BA}$ ir $\frac{1}{3}\vec{AC}$ yra kolinearūs.

△ Remdamiesi operacijų su vektoriais savybėmis, gauname $\vec{AB}+\vec{CB}+$ $+2\vec{BA}=(\vec{AB}+\vec{BA})+(\vec{BA}-\vec{BC})=\mathbf{0}+\vec{CA}=\vec{CA}=-\vec{AC}$. Taigi radome skaičių $k=-1/3$, tenkinantį sąlygą $\frac{1}{3}\vec{AC}=k(\vec{AB}+\vec{CB}+2\vec{BA})$. Remiantis kolinearumo požymiu, sąlygoje nurodyti vektoriai yra kolinearūs. ▲

§ 9. VEKTORIAUS PROJEKCIJA AŠYJE

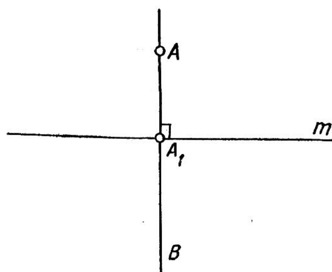
Imkime tiesę l, kurioje duotas ilgio matavimo vienetas. Sakykime, A ir B yra tokie tiesės l taškai, kad $|\vec{AB}|=1$. Vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{BA}$ vadinami tiesės l vienetiniais vektoriais.

Tiesės vienetiniai vektoriai nustato dvi kryptis. Viena jų vadinama teigiamąja, kita – neigiamąja kryptimi.

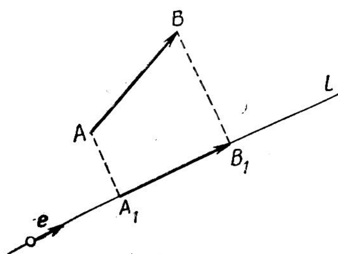
Apibrėžimas. Tiesė, kurioje nustatyta teigiamoji kryptis ir duotas ilgio matavimo vienetas, vadinama *ašimi*. Vektorius $\mathbf{e}$ ($|\mathbf{e}|=1$), nustatantis ašies kryptį, vadinamas *vienetiniu vektoriumi*.

Sakykime, m yra tiesė. Parinkime tašką $A\notin m$ ir nubrėžkime tiesę $(AB)\perp m$. Tarkime, kad $(AB)\cap m=A_1$. Tašką A_1 vadinsime taško A projekcija tiesėje m (23 pav.).

Jeigu $A\in m$, tai $A=A_1$.



23 pav.



24 pav.

Imkime ašį l su nustatančiu jos kryptį vienetiniu vektoriumi $\mathbf{e}$. Sakykime, $\mathbf{a}=\vec{AB}$ yra bet koks vektorius (24 pav.). Tarkime, kad A_1 ir B_1 yra taškų A ir B projekcijos ašyje l. Vektorių $\vec{A_1B_1}$ vadinsime vektoriaus $\vec{AB}$ *vektorine projekcija* ašyje l ir žymėsime $\vec{\text{pr}}_l\vec{AB}$.

Jeigu $(\vec{AB})\parallel l$, tai $\vec{\text{pr}}_l\vec{AB}=\vec{AB}$; jeigu $(AB)\perp l$, tai $\vec{\text{pr}}_l\vec{AB}=\mathbf{0}$; jeigu $\vec{AB}=\mathbf{0}$, tai $\vec{\text{pr}}_l\vec{AB}=\mathbf{0}$.

Sakykime, l yra ašis, o $\mathbf{e}$ – jos vienetinis vektorius. Tarkime, kad $\vec{A_1B_1}=$ $=\vec{\text{pr}}_l\vec{AB}$. Aišku, vektoriai $\mathbf{e}$ ir $\vec{A_1B_1}$ yra kolinearūs. Tada galima rasti tokį

skaičių x, kad būtų $\overrightarrow{A_1B_1}=x\mathbf{e}$. Skaičius x vadinamas vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ *skaliarine projekcija* (arba tiesiog *projekcija*) ašyje l ir žymimas $\text{pr}_l\overrightarrow{AB}$.

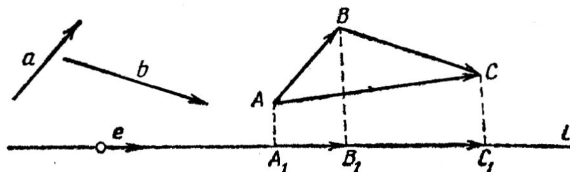
Taigi

$$\overrightarrow{\text{pr}_l AB}=(\text{pr}_l\overrightarrow{AB})\cdot\mathbf{e}.$$

Išnagrinėsime kai kurias vektoriaus projekcijos ašyje l savybes.

1 teorema. *Dviejų vektorių sumos (skirtumo) projekcija bet kurioje ašyje yra lygi tų vektorių projekcijų sumai (skirtumui).*

□ Kadangi $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$, tai tą teoremą užtenka įrodyti imant tik dviejų vektorių sumą.

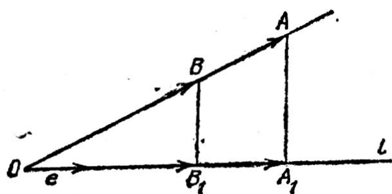


25 pav.

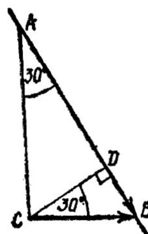
Sakykime, $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$, tada $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (25 pav.). Pažymėję A_1,B_1 ir C_1 taškų A, B ir C projekcijas ašyje l, galime užrašyti

$$\overrightarrow{A_1B_1}=x_1\mathbf{e},\quad \overrightarrow{B_1C_1}=x_2\mathbf{e},\quad \overrightarrow{A_1C_1}=x\mathbf{e};$$

čia $x_1=\text{pr}_l\mathbf{a}$, $x_2=\text{pr}_l\mathbf{b}$, $x=\text{pr}_l\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Tačiau $x\mathbf{e}=\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=x_1\mathbf{e}+$ $+x_2\mathbf{e}=(x_1+x_2)\mathbf{e}$. Iš čia išplaukia, kad $x=x_1+x_2$, t. y. $\text{pr}_l\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\text{pr}_l\mathbf{a}+$ $+\text{pr}_l\mathbf{b}$. ■



26 pav.



27 pav.

2 teorema. *Vektoriaus* $k\mathbf{a}$ *projekcija bet kokioje ašyje* l *yra lygi vektoriaus* $\mathbf{a}$ *projekcijai ašyje* l, *padaugintai iš skaičiaus* k:

$$\text{pr}_l\,(k\,\mathbf{a})=k\,\text{pr}_l\,\mathbf{a}.$$

□ Iš taško O, esančio ašyje l, nubrėžę vektorių $\mathbf{a}$, gausime vektorių $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ (26 pav.). Pažymėsime A_1 taško A projekciją ašyje l. Tada $(AA_1)\perp l$. Sakykime, homotetija, kurios centras O ir koeficientas k, tašką A atvaizduoja į tašką B, o tašką A_1 – į tašką B_1. Tada, remiantis homotetijos savybe, $(BB_1)\parallel$

$\|(AA_1)$ ir $(BB_1)\perp l$. Vadinasi, B_1 – taško B projekcija ašyje l. Remdamiesi homotetijos apibrėžimu, gauname $\vec{OB}=k\vec{OA}=k\mathbf{a}$, $\vec{OB_1}=k\vec{OA_1}$. Tačiau $\vec{OA_1}=x\mathbf{e}$, $\vec{OB_1}=x_1\mathbf{e}$; čia $x=\mathrm{pr}_l\mathbf{a}$, $x_1=\mathrm{pr}_l(k\mathbf{a})$. Vadinasi, $x_1\mathbf{e}=\vec{OB_1}=k\vec{OA_1}= =k(x\mathbf{e})=(kx)\mathbf{e}$; iš čia $x_1=kx$, t. y. $\mathrm{pr}_l(k\mathbf{a})=k\mathrm{pr}_l\mathbf{a}$. ■

Uždavinys. Duotas statusis trikampis ABC ($\hat{C}=90°$, $\hat{A}=30°$). Kryptinė atkarpa AB nustato vienetinį vektorių. Reikia rasti vektorinę ir skaliainę vektoriaus $\vec{CB}$ projekciją ašyje, nustatytoje vektoriaus $\vec{AB}$.

△ Rasime taškų C ir B projekcijas ašyje AB. Tai bus atitinkamai taškai D ir B (27 pav.). Tada $\vec{DB}=\mathrm{pr}_{(AB)}\vec{CB}$.

Iš stačiojo trikampio, kurio smailusis kampas lygus 30°, savybių išplaukia, jog $|CB|=\frac{1}{2}|AB|$, $|DB|=\frac{1}{2}|CB|$; iš čia $|DB|=\frac{1}{4}|AB|$. Taigi $\vec{DB}= =\frac{1}{4}\vec{AB}$ ir $\mathrm{pr}_{(AB)}\vec{CB}=\frac{1}{4}$. ▲

Atkreipsime dėmesį, kad vektoriaus projekcijos ašyje apibrėžimas ir projekcijų savybės teisingos tiek plokštumos, tiek ir erdvės vektoriams.

§. 10. KAMPAS TARP DVIEJŲ VEKTORIŲ

Išsiaiškinsime kampo tarp dviejų krypčių erdvėje sąvoką. VII–VIII klasės geometrijos kurse aiškinomės krypties plokštumoje sąvoką.

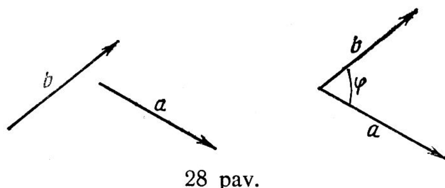
Kaip ir plokštumoje, kryptimi erdvėje vadinama visų vienos krypties spindulių aibė. Todėl bet kuris iš duotosios aibės vienakrypčių spindulių pilnutinai nustato tą kryptį (panašiai kiekviena kryptinė atkarpa visiškai nustato ja vaizduojamą vektorių). Todėl paprastai kryptis erdvėje nustatoma tik vienu spinduliu.

Galima įrodyti, kad du iškilieji kampai, kurių kraštinės atitinkamai vienodų krypčių, yra lygūs.

Apibrėžimas. *Kampu tarp dviejų krypčių* vadinamas didumas kampo, kurį sudaro du tų krypčių spinduliai, turintys bendrą pradžią.

Jeigu duoti du spinduliai l_1 ir l_2, tai kampas tarp jų krypčių žymimas $\varphi=(\widehat{l_1;l_2})$; čia $\varphi\in[0°;180°]$.

Taigi kampas tarp krypčių yra dydis (ne geometrinė figūra).



28 pav.

Apibrėžimas. *Kampu tarp dviejų nenulinių vektorių* vadinamas kampas tarp tų vektorių krypčių. Kampas tarp vektorių **a** ir **b** žymimas $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=\varphi$ (28 pav.).

Jeigu kampas tarp vektorių **a** ir **b** lygus 90°, tai vektoriai vadinami statmenais; trumpai tai užrašoma: $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

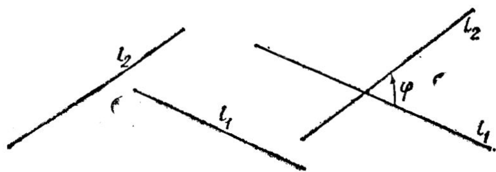
Pastebėsime štai ką: jeigu $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$, tai $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=0°$; jeigu $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$, tai $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=180°$.

Jeigu tiesės kertasi, tai kampu tarp jų vadinamas didumas mažesniojo kampo, kurį sudaro tos tiesės.

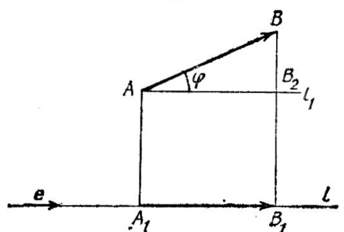
Jeigu tiesės prasilenkia, tai kampu tarp jų vadinamas kampas tarp susikertančių tiesių, kurios yra lygiagrečios toms prasilenkiančioms tiesėms (29 pav.).

Pateiksime dar vieną projekcijų savybę.

Teorema. *Vektoriaus projekcija ašyje yra lygi projektuojamojo vektoriaus ilgio ir kampo, kurį sudaro vektorius ir ašis, kosinuso sandaugai.*



29 pav.



30 pav.

□ Per atkarpos AB, vaizduojančios vektorių $\overrightarrow{AB}$, pradžią išveskime ašiai l lygiagretų spindulį AB_2 (30 pav.). Tada $\widehat{BAB_2}=\varphi$ yra kampas tarp vektoriaus ir ašies l (pagal apibrėžimą). Sakykime, $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$. Nagrinėkime $\triangle\ BAB_2$. $|AB_2|=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi$.

Tačiau $|AB_2|=|A_1B_1|$ ir todėl $|A_1B_1|=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi$.

Kadangi

$$|A_1B_1|=\text{pr}_l\overrightarrow{AB},\ \text{tai}\ \text{pr}_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi. \qquad (1)$$

Jeigu $90°<\varphi\leqslant 180°$, tai (1) lygybė nepasikeis, nes $\cos(180°-\varphi)=-\cos\varphi$. ■

§ 11. VEKTORIAUS SKAIDYMAS PLOKŠTUMOJE DVIEM NEKOLINEARIAIS VEKTORIAIS

Sakykime, vektoriai **a** ir **b** yra nekolinearūs. Jeigu skaičiai x ir y tenkina sąlygą

$$x\cdot\mathbf{a}+y\cdot\mathbf{b}=\mathbf{0}, \qquad (1)$$

tai $x=0$ ir $y=0$.

□ Iš tikrųjų, jeigu, pavyzdžiui, $x\neq 0$, tai iš (1) išplaukia

$$\mathbf{a}=-\frac{y}{x}\cdot\mathbf{b}.$$

Tačiau tai prieštarauja tam, kad vektoriai **a** ir **b** yra nekolinearūs. Todėl $x=0$.

Panašiai įrodoma, kad ir $y=0$.

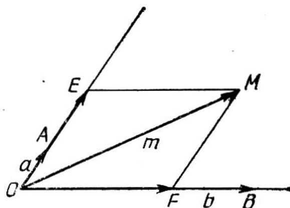
Apibrėžimas. Vektorių $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *tiesiniu dariniu* vadinama tų vektorių ir bet kokių skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sandaugų suma.

Taigi išraiška $3\mathbf{a}-5\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$ yra vektorių **a**, **b** ir **c** tiesinis darinys.

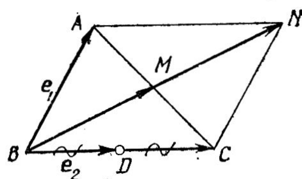
Teorema. *Bet kuris plokštumos vektorius* **m** *vieninteliu būdu išreiškiamas bet kurių dviejų nekolinearių vektorių* **a** *ir* **b** *tiesiniu dariniu:*

$$\mathbf{m}=x\cdot\mathbf{a}+y\cdot\mathbf{b}. \qquad (2)$$

□ Sakykime, vektoriai **a**, **b** ir **m** turi bendrą pradžią O (31 pav.). Jeigu paaiškėtų, kad vektorius **m** yra kolinearus vienam iš vektorių **a** ir **b** (pavyzdžiui,



31 pav.



32 pav.

vektoriui **a**), tai, imant tam tikrą skaičių x, būtų $\mathbf{m}=x\cdot\mathbf{a}=x\cdot\mathbf{a}+0\cdot\mathbf{b}$. Kartu vektorius **m** būtų užrašytas (2) pavidalu.

Jeigu vektorius **m** nekolinearus nei vektoriui **a**, nei vektoriui **b**, tai, per tašką M nubrėžę tieses, lygiagrečias $[OB)$ ir $[OA)$ (31 pav.), gauname $\mathbf{m}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$. Tačiau tada pagal vektorių kolinearumo požymį egzistuoja tokie skaičiai x ir y, kad $\overrightarrow{OE}=x\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OF}=y\mathbf{b}$. Iš čia ir išplaukia (2) lygybė.

Įrodysime, kad toks skaidinys yra vienintelis. Sakykime, $\mathbf{m}=x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}=x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}$. Tada $(x_1-x_2)\mathbf{a}+(y_1-y_2)\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Kadangi vektoriai **a** ir **b** yra nekolinearūs, tai lygybė teisinga tik tada, kai $x_1=x_2$ ir $y_1=y_2$. Įrodėme skaidinio vienatį. ■

Jeigu vektorius yra tam tikrų vektorių tiesinis darinys, tai sakoma, kad duotasis vektorius yra *išskaidytas* tais vektoriais.

Apibrėžimas. *Baze plokštumoje* vadinami du nekolinearūs tos plokštumos vektoriai, paimti tam tikra tvarka.

Sakykime, $\mathbf{e}_1$ ir $\mathbf{e}_2$ yra bazė. Skaičiai x ir y vadinami vektoriaus **a** koordinatėmis duotoje bazėje, jeigu

$$\mathbf{a}=x\,\mathbf{e}_1+y\,\mathbf{e}_2.$$

Todėl bazė plokštumoje kiekvienam vektoriui **a** vienareikšmiškai priskiria sutvarkytą skaičių x ir y porą ir atvirkščiai, kiekvieną sutvarkytą skaičių x ir y porą atitinka vienintelis plokštumos vektorius.

Plokštumos vektorius, duotas koordinatėmis, žymimas $\mathbf{a}=(x;\ y)$.

Uždavinys. Duota $\triangle ABC$, $D\in[BC]$, $|BD|=|DC|$, $[BM]$ – trikampio ABC pusiaukraštinė. Reikia rasti vektoriaus $\overrightarrow{BM}$ koordinates, jeigu kryptinės atkarpos BA ir BD vaizduoja bazės vektorius.

$\triangle$ Papildysime $\triangle ABC$ iki lygiagretainio $ABCN$ (32 pav.). Tada $\overrightarrow{BN}=$ $=2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. Pažymėję $\overrightarrow{BA}=\mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{BD}=\mathbf{e}_2$, gauname $2\overrightarrow{BM}=1\cdot\mathbf{e}_1+$ $+2\cdot\mathbf{e}_2$; iš čia $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\mathbf{e}_1+1\cdot\mathbf{e}_2$.

Taigi duotoje bazėje $\overrightarrow{BM}=(1/2\,;1)$. ▲

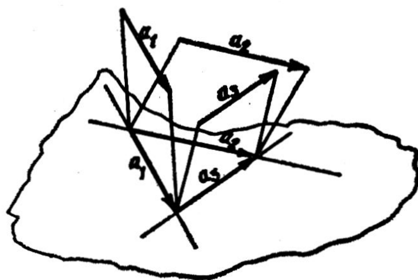
§ 12. KOMPLANARŪS VEKTORIAI

Iš aštuonmetės mokyklos geometrijos kurso žinome, kad tiesė yra lygiagreti plokštumai, jeigu ji neturi su ta plokštuma bendrų taškų arba yra toje plokštumoje.

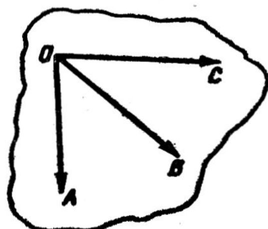
Vektorius $\overrightarrow{AB}$ vadinamas *lygiagrečiu plokštumai*, jeigu tiesė AB yra lygiagreti tai plokštumai. Nulinis vektorius laikomas lygiagrečiu bet kokiai plokštumai.

Bet kokią erdvės vektorių aibę vadinsime *vektorių sistema* ir žymėsime $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Apibrėžimas. Vektorių sistema vadinama *komplanaria*, jeigu visi tos sistemos vektoriai lygiagretūs vienai ir tai pačiai plokštumai (33 pav.).



33 pav.



34 pav.

Todėl bet kokie du vektoriai visada yra komplanarūs.

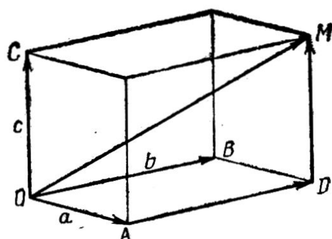
Aišku, jeigu vektoriai $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra komplanarūs, tai taškai A, B ir C priklauso vienai plokštumai. Todėl kartais sakoma, kad komplanarius vektorius galima perkelti į vieną plokštumą (34 pav.).

Dabar ieškosime trijų nekomplanarių vektorių sumos. Taikysime vadinamąją „gretasienio taisyklę". Sakykime, vektoriai **a**, **b** ir **c** yra nekomplanarūs (35 pav.). Laisvai pasirinkime tašką O ir nubrėžkime vektorius $\overrightarrow{OA}=$ $=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ ir $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. Dabar nubraižykime gretasienį, briaunomis laikydami $[OA]$, $[OB]$ ir $[OC]$. Nubrėžkime to gretasienio įstrižainę OM. Kadangi $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DM}$, tai

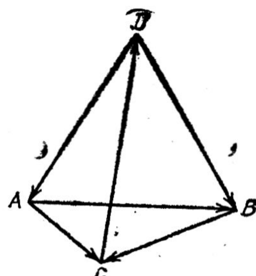
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OM},\text{ t. y. } \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\overrightarrow{OM}.$$

Taigi trijų nekomplanarių vektorių suma yra lygi vektoriui, vaizduojamam įstrižaine gretasienio, kurio briaunos yra duotieji vektoriai.

Uždavinys. Nurodykite, kokias trikampės piramidės $ABCD$ briaunas atitinka: a) du kolinearūs vektoriai; b) trys komplanarūs vektoriai; c) trys nekomplanarūs vektoriai.



35 pav.



36 pav.

△ Išnagrinėsime piramidės brėžinį (36 pav.). Remdamiesi kolinearių ir komplanarių vektorių apibrėžimu, gausime:

a) kolinearūs vektoriai negali atitikti jokių dviejų skirtingų piramidės briaunų, nes tarp jų nėra lygiagrečių;

b) trys komplanarūs vektoriai (pavyzdžiui, $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ ir $\vec{BC}$) atitinka briaunas AC, CB, BA (arba briaunas AD, DC ir AC);

c) trys nekomplanarūs vektoriai (pavyzdžiui, $\vec{DA}$, $\vec{CD}$ ir $\vec{DB}$) atitinka briaunas DA, DC ir DB. ▲

§ 13. VEKTORIAUS SKAIDYMAS TRIMIS NEKOMPLANARIAIS VEKTORIAIS

Teorema. *Bet kokį vektorių* **m** *vieninteliu būdu galima išreikšti bet kurių nekomplanarių vektorių* **a**, **b** *ir* **c** *tiesiniu dariniu:*

$$\mathbf{m} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}. \quad (1)$$

□ Pirmiausia pastebėsime, kad bet kurie du vektorių sistemos **a**, **b**, **c** vektoriai yra nekolinearūs; priešingu atveju vektorių **a**, **b**, **c** sistema būtų komplanari. Todėl, jeigu vektorius **m** komplanarus dviem duotosios sistemos vektoriams, tai jis gali būti užrašytas kaip tų vektorių tiesinis darinys (remiantis teorema apie vektoriaus reiškimą dviejų nekolinearių vektorių tiesiniu dariniu (§ 11)).

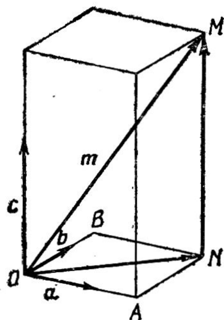
Sakykime, vektorius **m** nėra komplanarus jokiems dviem duotosios sistemos vektoriams (37 pav.). Atidėję visus vektorius nuo bendro pradžios taško O, per tašką M (kryptinės atkarpos OM, vaizduojančios vektorių $\vec{OM} = \mathbf{m}$, galo tašką) išvesime tiesę, lygiagrečią vektoriui **c**. Ta tiesė kirs plokštumą OAB taške N. Aišku, $\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM}$.

Remiantis kolineariųjų vektorių savybe ir vektoriaus skaidinio dviem nekolineariaisiais vektoriais teorema, galima rasti tokius skaičius x, y ir z, kad $\vec{ON}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$ ir $\vec{NM}=z\mathbf{c}$.

Vadinasi,

$$\vec{OM}=\vec{ON}+\vec{NM}=x\,\mathbf{a}+y\,\mathbf{b}+z\,\mathbf{c}.$$

Vektoriaus **m** skaidinio vektoriais **a**, **b** ir **c** vienatis įrodinėjama panašiai, kaip ir teoremoje apie vektoriaus skaidinį dviem nekolineariais vektoriais (§ 11). ■



37 pav.

Apibrėžimas. *Erdvės baze* vadinami trys nekomplanarūs vektoriai, paimti tam tikra tvarka.

Sakykime, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ir $\mathbf{e}_3$ yra bazė. Jeigu

$$\mathbf{a}=x\,\mathbf{e}_1+y\,\mathbf{e}_2+z\,\mathbf{e}_3,$$

tai skaičiai x, y ir z vadinami vektoriaus **a** koordinatėmis duotojoje bazėje.

Taigi kiekvienas erdvės vektorius vienareikšmiškai nusakomas sutvarkytu skaičių x, y ir z trejetu. Erdvės vektorius, duotas koordinatėmis, žymimas $\mathbf{a}=(x;\ y;\ z)$.

Uždavinys. Sakykime, vektoriai $\vec{DB}$, $\vec{DC}$ ir $\vec{DA}$, vaizduojami atitinkamomis kryptinėmis atkarpomis — trikampės piramidės $ABCD$ briaunomis, sudaro bazę. Reikia rasti vektoriaus $\vec{AB}$ koordinates toje bazėje.

△ Naudosimės 36 paveikslu. Iš skirtumo formulės gauname $\vec{AB}=\vec{DB}-\vec{DA}$. Pažymėję $\vec{DA}=\mathbf{e}_1$, $\vec{DB}=\mathbf{e}_2$, $\vec{DC}=\mathbf{e}_3$, turime $\vec{AB}=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ arba $\vec{AB}=-1\cdot\mathbf{e}_1+1\cdot\mathbf{e}_2+0\cdot\mathbf{e}_3$. Iš čia $\vec{AB}=(-1;\ 1;\ 0)$. ▲

§ 14. VEIKSMAI SU VEKTORIAIS, DUOTAIS KOORDINATĖMIS

Jeigu vektoriai duoti koordinatėmis bazėje $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, tai veiksmai su jais atliekami remiantis toliau pateikiamomis taisyklėmis.

1. Sudedant du (arba daugiau) vektorius, sudedamos jų atitinkamos koordinatės:

$$(x_1;\ y_1;\ z_1)+(x_2;\ y_2;\ z_2)=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2).$$

□ Iš tikrųjų, $(x_1;\ y_1;\ z_1)+(x_2;\ y_2;\ z_2)=(x_1\,\mathbf{e}_1+y_1\,\mathbf{e}_2+z_1\,\mathbf{e}_3)+(x_2\,\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+z_2\,\mathbf{e}_3)=(x_1+x_2)\,\mathbf{e}_1+(y_1+y_2)\,\mathbf{e}_2+(z_1+z_2)\,\mathbf{e}_3=(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$.

Įrodymas analogiškas ir kai vektorių yra trys arba daugiau. ■

2. Atimant vektorius, atimamos jų atitinkamos koordinatės:

$$(x_1;\ y_1;\ z_1)-(x_2;\ y_2;\ z_2)=(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2).$$

Įrodykite savarankiškai.

3. Norint vektorių padauginti iš skaičiaus, reikia visas vektoriaus koordinates padauginti iš to skaičiaus.

□ Vektorių $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ padauginkime iš skaičiaus λ:

$$\lambda(x_1;\ y_1;\ z_1)=\lambda(x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2+z_1\mathbf{e}_3)=(\lambda x_1)\mathbf{e}_1+(\lambda y_1)\mathbf{e}_2+(\lambda z_1)\mathbf{e}_3=$$
$$=(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1).\ ■$$

Uždavinys. Duoti vektoriai $\mathbf{a}=(-4;6;0)$, $\mathbf{b}=(1;-1;7)$. Reikia rasti šių vektorių koordinates: 1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 2) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; 3) $5\mathbf{a}$.

△ Remdamiesi 1—3 taisyklėmis, gauname

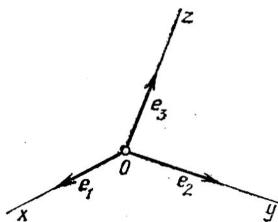
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(-3;\ 5;\ 7);\ \mathbf{a}-\mathbf{b}=(-5;\ 7;\ -7);\ 5\mathbf{a}=(-20;\ 30;\ 0).\ ▲$$

§ 15. DEKARTO KOORDINAČIŲ SISTEMA

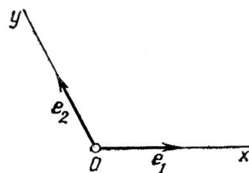
Sakykime, erdvėje duoti bet kokie du skirtingi taškai O ir M; vienas iš jų, pavyzdžiui, taškas O, fiksuojamas ir laikomas pradiniu tašku. Tada vektorius $\overrightarrow{OM}$ vadinamas taško M *spinduliu vektoriumi* taško O atžvilgiu (38 pav.).



38 pav.



39 pav.



40 pav.

Sakykime, erdvėje duotas taškas O ir bazė $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Aibė, susidedanti iš taško O ir tos bazės, vadinama *Dekarto koordinačių sistema*. Šiuo atveju taškas O vadinamas *koordinačių pradžia*.

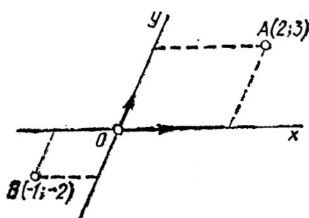
Per tašką O išvestas tieses bazinių vektorių $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ir $\mathbf{e}_3$ kryptimis vadinsime *koordinačių ašimis* (39 pav.): tiesę Ox – *abscisių ašimi*, tiesę Oy – *ordinačių ašimi*, o tiesę Oz – *aplikačių ašimi*.

Taško M spindulio vektoriaus koordinates vadinsime to *taško koordinatėmis* duotojoje koordinačių sistemoje (x – abscisė, y – ordinatė, z – aplikatė).

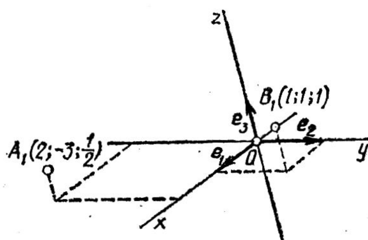
Analogiškai apibrėžiama ir Dekarto koordinačių sistema plokštumoje (aibė, susidedanti iš laisvai pasirinkto taško O ir tam tikros bazės plokštumoje $\mathbf{e}_1$ ir $\mathbf{e}_2$) (40 pav.).

Taško M koordinatės paprastai rašomos šalia jį žyminčios raidės: $M(x; y)$ plokštumoje ir $M(x; y; z)$ erdvėje.

Akivaizdu, kad Dekarto koordinačių sistema erdvėje nustato abipus vienareikšmę atitiktį tarp erdvės taškų ir sutvarkytų skaičių trejetų, o plokštumoje nustato abipus vienareikšmę atitiktį tarp plokštumos taškų ir sutvarkytų skaičių porų.



41 pav.



42 pav.

Pavyzdžiui, tašką A (41 pav.) atitinka sutvarkyta skaičių pora (2; 3), tašką A_1 (42 pav.) atitinka sutvarkytas skaičių trejetas $\left(2; -3; \frac{1}{2}\right)$. Sutvarkytą skaičių porą $(-1; -2)$ atitinka vienintelis plokštumos taškas B (41 pav.), o sutvarkytą skaičių trejetą (1; 1; 1) — vienintelis erdvės taškas B_1 (42 pav.).

Sakykime, koordinačių sistemoje O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ duotas vektorius $\overrightarrow{AB}$ (43 pav.). Remiantis vektorių skirtumo apibrėžimu, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Sakykime, taškų A ir B koordinatės yra atitinkamai $(x_1; y_1; z_1)$ ir $(x_2; y_2; z_2)$. Remdamiesi 14 paragrafo 2 savybe, gauname

43 pav.

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1).$$

Taigi, ieškant duotojo vektoriaus koordinačių, pakanka iš jo galo koordinačių atimti atitinkamas jo pradžios koordinates.

1 uždavinys. Reikia rasti vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates, kai $A(5; -7; 0{,}5)$ ir $B(2; -1; 2{,}5)$.

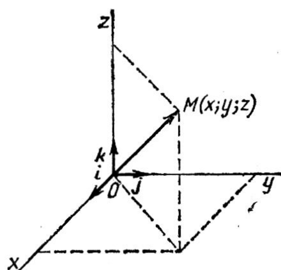
△ Sakykime, $\overrightarrow{AB}=(x; y; z)$. Tada $x=2-5=-3$, $y=-1-(-7)=6$, $z=2{,}5-0{,}5=2$.

Taigi $\overrightarrow{AB}=(-3; 6; 2)$. ▲

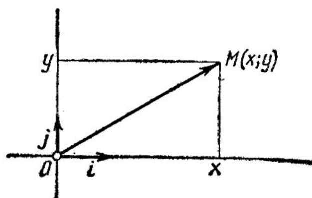
Jeigu bazę sudarantys vektoriai O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ yra poromis statmeni vienetiniai vektoriai, tai koordinačių sistema O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vadinama *stačiakampe Dekarto koordinačių sistema erdvėje.*

Analogiškai, jeigu vienetiniai baziniai vektoriai $\mathbf{e}_1$ ir $\mathbf{e}_2$ yra tarpusavyje statmeni, tai koordinačių sistema O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ vadinama *stačiakampe Dekarto koordinačių sistema plokštumoje.*

Vienetiniai baziniai stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos vektoriai paprastai žymimi **i**, **j** ir **k**.



44 pav.



45 pav.

Erdvės vektoriaus $\mathbf{a}=\overrightarrow{OM}$ skaidinys vektoriais **i**, **j** ir **k** užrašomas šitaip (44 pav.):

$$\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

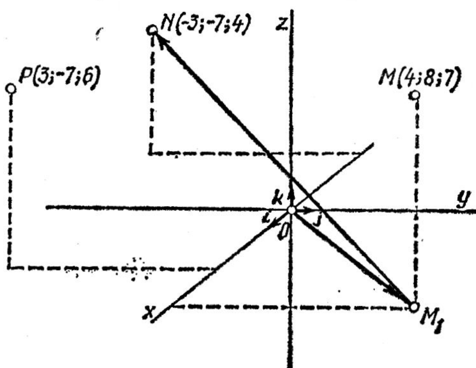
Tokiu atveju sakome, kad vektorius **a** yra išskaidytas vienetiniais vektoriais (ortais) erdvės stačiakampėje Dekarto bazėje.

Vektoriaus **a** skaidinys vektoriais **i** ir **j** plokštumos stačiakampėje Dekarto bazėje yra šitoks (45 pav.):

$$\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}.$$

11 ir 13 paragrafuose įrodėme, kad taip išskaidyti vektorius visada galima; be to, toks skaidinys yra vienintelis.

2 uždavinys. Reikia rasti vektorių $\overrightarrow{OM_1}$ ir $\overrightarrow{M_1N}$ skaidinį 46 paveiksle pavaizduotoje Dekarto stačiakampėje bazėje.



46 pav.

△ Pirmiausia rasime taško M_1 koordinates. Kadangi taškas M_1 yra taško M projekcija plokštumoje xOy, tai $M_1(4;\ 8;\ 0)$. Tada $\overrightarrow{OM_1}=4\mathbf{i}+8\mathbf{j}+0\mathbf{k}$.

Dabar rasime vektoriaus $\overrightarrow{M_1N}$ koordinates duotojoje bazėje. $\overrightarrow{M_1N}=(-3-4;\ -7-8;\ 4-0)$ ir $\overrightarrow{M_1N}=(-7;\ -15;\ 4)$. Tada $\overrightarrow{M_1N}=-7\mathbf{i}-15\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. ▲

§ 16. POLINĖ KOORDINAČIŲ SISTEMA

Susipažinsime dar su vienu taško padėties plokštumoje nustatymo būdu – poline koordinačių sistema.

Sakykime, plokštumoje duotas taškas O, spindulys ON (47 pav.) ir vienetinis vektorius $\mathbf{e}_1$, kurio kryptis sutampa su spindulio ON kryptimi.

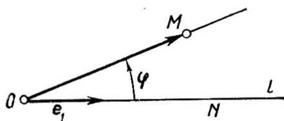
Sakykime, taškas $M \neq O$, kampo MON didumas – kampas tarp vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ ir ašies l spindulio ON, matuojamas, pavyzdžiui, laipsniais ir nagrinėjamas teigiamąja spindulio ON atžvilgiu kryptimi (priešinga laikrodžio rodyklės judėjimo krypčiai).

Tada $\varphi = \widehat{MON}$ ir $r = |\overrightarrow{OM}|$ vadinami taško M *polinėmis koordinatėmis*: r – *poliniu spinduliu*, φ – *poliniu kampu*.

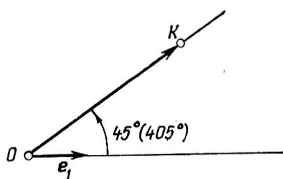
Taško M polinės koordinatės užrašomos šitaip: $M(r;\ \varphi)$.

Taškas O vadinamas *poliumi*, o tiesė l – *poline ašimi*.

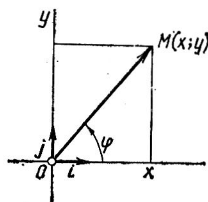
Jeigu $M=O$, tai $r=0$, o φ reikšmė neapibrėžta. Visų kitų plokštumos taškų $r>0$, o φ reikšmė nusakoma 360° kartotinio dėmens tikslumu. Kitaip tariant, pavyzdžiui, skaičių (3; 45°) ir (3; 405°) poros yra to paties taško K polinės koordinatės (48 pav.).



47 pav.



48 pav.



49 pav.

Taigi, jeigu $r=0$, tai skaičių porą $(r;\ \varphi)$ atitinka taškas O – polius; jeigu $r>0$, tai skaičių poras $(r_1;\ \varphi_1)$ ir $(r_2;\ \varphi_2)$ atitinka tas pats taškas, kai $r_1 = r_2$ ir $\varphi_1 - \varphi_2 = 360° k$, $k \in Z$.

Nustatysime plokštumos taško M polinių ir Dekarto koordinačių sąryšį.

Sakykime, plokštumoje duota stačiakampė Dekarto koordinačių sistema $(O;\ \mathbf{i};\ \mathbf{j})$. Jeigu koordinačių pradžios tašką O laikysime poliumi, abscisių ašies spindulį Ox – poline ašimi l (49 pav.), tai ordinačių ašies spindulys sudarys 90° kampą su ašimi (skaičiuojant laikrodžio rodyklės judėjimui priešinga kryptimi).

Akivaizdu, kad taško M Dekarto koordinačių išraiškos jo polinėmis koordinatėmis yra šitokios:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{1}$$

Remiantis (1) lygybėmis, nuo stačiakampių Dekarto koordinačių galima pereiti prie polinių taško M koordinačių (ir atvirkščiai).

□ Sakykime, x ir y yra taško M Dekarto koordinatės. Tada $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2 \cdot 1 = r^2.$$

Taigi $x^2+y^2=r^2$ ir iš čia

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \quad (2)$$

Kadangi $r\geqslant 0$, tai (2) lygybėje šaknies reikšmė imama su pliuso ženklu. Jeigu $r\neq 0$ ($M\neq O$), tai iš (1) ir (2) išplaukia

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \ \blacksquare \quad (3)$$

1 uždavinys. Reikia rasti taško $M(-1;\ \sqrt{3})$ polines koordinates.

△ Remdamiesi (2) formule, gauname $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$. Kadangi $2\neq 0$, tai iš (3) lygybių randame

$$\cos\varphi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

iš čia $\varphi=120°$. Taigi $M(2;\ 120°)$. ▲

2 uždavinys. Reikia rasti taško $M(4;\ 135°)$ stačiakampes Dekarto koordinates.

△ Iš (1) lygybių gauname

$$x=4\cos 135°=4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2},$$

$$y=4\sin 135°=4\ \frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

Taigi $M(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$. ▲

§ 17. ATKARPOS ILGIS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

Iš aštuonmetės mokyklos geometrijos kurso žinome, kad atstumas d tarp koordinačių tiesės (ašies) taškų A ir B reiškiamas formule

$$d=|AB|=|x_B-x_A|; \quad (1)$$

čia x_A ir x_B — tiesės taškų A ir B koordinatės.

Dabar išsiaiškinkime, kaip reiškiamas atkarpos AB ilgis koordinatėmis, kai ta atkarpa yra plokštumoje ir erdvėje.

Sakykime, stačiakampėje koordinačių sistemoje O, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ duoti du plokštumos taškai $A(x_1;\ y_1)$ ir $B(x_2;\ y_2)$. Reikia rasti atkarpos AB ilgį d.

Išnagrinėsime atvejį, kai atkarpa AB nėra lygiagreti koordinačių ašims (50 pav.). Per taškus A ir B nubrėžkime tieses, lygiagrečias koordinačių ašims, ir tarkime, kad A_1, B_1, A_2 ir B_2 — tų tiesių susikirtimo su ašimis taškai.

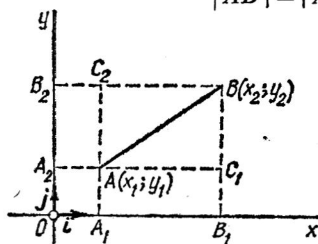
Pritaikę Pitagoro teoremą trikampui ABC_1, gauname $|AB|^2=|AC_1|^2+|C_1B|^2$. Kadangi $|AC_1|=|A_1B_1|=|x_2-x_1|$ ir $|C_1B|=|A_2B_2|=|y_2-y_1|$, tai $|AB|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$.

Vadinasi,

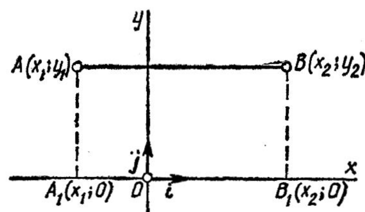
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (2)$$

Jeigu atkarpa AB lygiagreti abscisių ašiai Ox, tai $y_1=y_2$ (51 pav.); atkarpos AB ilgis lygus atkarpos A_1B_1 ilgiui, todėl

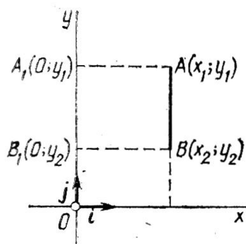
$$|AB|=|A_1B_1|=|x_2-x_1|.$$



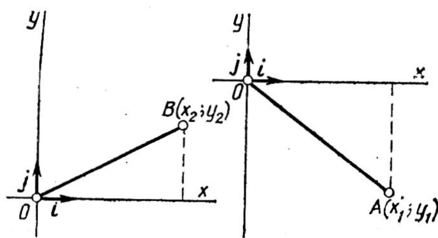
50 pav.



51 pav.



52 pav.

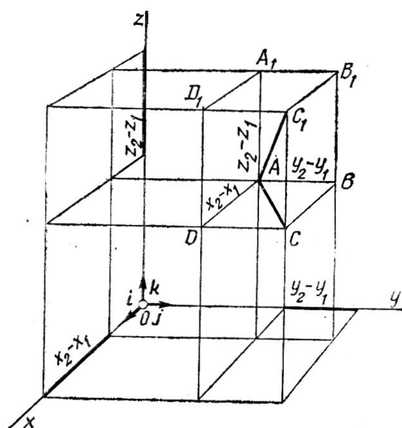


53 pav.

Tą patį gautume, jeigu $[AB]\in(Ox)$; tuo atveju būtų $y_1=y_2=0$.

Panašiai įrodoma, kad $|AB|=|y_2-y_1|$, kai atkarpa AB yra lygiagreti ordinačių ašiai Oy (52 pav.).

Taigi atkarpos ilgis plokštumoje yra lygus kvadratinei šakniai iš vienavardžių koordinačių skirtumų kvadratų sumos.



54 pav.

Jeigu vienas iš taškų A arba B sutampa su koordinačių pradžios tašku, tai (2) formulė supaprastėja (53 pav.). Tada $d=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ arba $d=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

Sakykime, A ir C_1 – erdvės taškai: $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ ir $C_1\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Sukonstruosime stačiakampį gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio taškai A ir C_1 yra jo įstrižainių galai (54 pav.). Pritaikę Pitagoro teoremą trikampiams ADC ir ACC_1,

gaunamе $|AC_1|=\sqrt{|AD|^2+|DC|^2+|CC_1|^2}$. Išreiškę $|AD|$, $|DC|$ ir $|CC_1|$ koordinatėmis, turime

$$|AC_1|^2=d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

arba

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (3)$$

Aišku, kai $z_1=z_2=0$, iš (3) formulės išplaukia (2) formulė; šiuo atveju atkarpa AC_1 priklauso plokštumai xOy.

§ 18. VEKTORIAUS ILGIS STAČIAKAMPĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE

Primename, kad vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgis apibrėžiamas kaip atstumas $|AB|$, t. y. kaip atkarpos AB ilgis.

Todėl, remdamiesi praeito paragrafo (2) ir (4) formulėmis, plokštumos vektoriaus ir erdvės vektoriaus ilgį išreikšime šitaip:

$$|\overrightarrow{AB}|=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \quad (1)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (2)$$

15 paragrafe buvo gauta vektoriaus $\overrightarrow{AB}$, duoto Dekarto koordinačių sistemoje, išraiška jį vaizduojančios atkarpos AB pradžios ir galo taškų koordinatėmis:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1).$$

Pažymėję $x_2-x_1=x$, $y_2-y_1=y$, $z_2-z_1=z$, gauname vektoriaus koordinatinę išraišką $\overrightarrow{AB}=(x;\ y;\ z)$.

Tada plokštumos ir erdvės vektorių ilgis yra išreiškiamas šitaip:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(plokštumoje)}, \quad (3)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{(erdvėje)}. \quad (4)$$

1 **uždavinys.** Reikia rasti vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgį, kai $A(4;\ 1)$, $B(7;\ 5)$.

$$\triangle\ |\overrightarrow{AB}|=|AB|=\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}=5. \ \blacktriangle$$

2 **uždavinys.** Reikia rasti vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgį, kai $A(3;5;1)$, $B(5;6;3)$.

$$\triangle\ |\overrightarrow{AB}|=|AB|=\sqrt{(5-3)^2+(6-5)^2+(3-1)^2}=3. \ \blacktriangle$$

3 **uždavinys.** Reikia rasti vektoriaus $\overrightarrow{AB}=(2;\ 3;\ -6)$ ilgį.

$$\triangle\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=7. \ \blacktriangle$$

§ 19. DVIEJŲ VEKTORIŲ SKALIARINĖ SANDAUGA

Išnagrinėsime kitą operaciją su dviem vektoriais – vektorių skaliarinę daugybą.

Pastebėsime, jog ši operacija ypatinga tuo, kad, atlikę ją su vektoriais, gauname skaičių (skaliarą), o ne vektorių.

Apibrėžimas. Dviejų nenulinių vektorių *skaliarine sandauga* vadinamas skaičius, lygus tų vektorių ilgių ir kampo tarp jų kosinuso sandaugai. Jeigu bent vienas iš vektorių yra nulinis, tai tų vektorių skaliarinė sandauga laikoma lygia nuliui. Vektorių **a** ir **b** skaliarinė sandauga žymima $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Taigi, remiantis apibrėžimu,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi; \qquad (1)$$

čia $\varphi=(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})$, $0\leqslant\varphi\leqslant180°$.

Jeigu $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, tai skaliarinė sandauga $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ vadinama vektoriaus **a** skaliariniu kvadratu ir žymima $\mathbf{a}^2$.

Kadangi $\cos(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{a}})=\cos 0°=1$, tai iš (1) lygybės išplaukia, kad $\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2$, t. y. vektoriaus **a** skaliarinis kvadratas yra lygus jo ilgio kvadratui.

Kartais patogu vektorių skaliarinę sandaugą apibrėžti projekcijų terminais.

Sakykime, duoti du vektoriai $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. Kampą tarp jų pažymėkime φ. Vektoriaus **b** projekcija ašyje, kurios kryptis sutampa su vektoriaus *a* kryptimi, išreiškiama formule (žr. § 9 ir 10)

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\cos\varphi; \qquad (2)$$

panašiai

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cos\varphi. \qquad (3)$$

Pasinaudoję (1) ir (2), (1) ir (3) formulėmis, galėsime užrašyti

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \qquad (4)$$

arba

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \qquad (5)$$

Todėl dviejų vektorių skaliarinė sandauga yra lygi vieno vektoriaus ilgiui, padaugintam iš kito vektoriaus projekcijos į pirmojo kryptį.

1 uždavinys. Kokio ženklo yra vektorių **a** ir **b** skaliarinė sandauga, jeigu jų sudaromas kampas φ tenkina sąlygą $90°<\varphi\leqslant180°$.

△ Kadangi formulėje $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi$ skaičiai $|\mathbf{a}|$ ir $|\mathbf{b}|$ yra neneigiami, tai $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ženklas sutampa su $\cos\varphi$ ženklu. Intervale $]90°; 180°]$ $\cos\varphi<0$, todėl $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$. ▲

2 uždavinys. Kokio didumo gali būti vektorių **a** ir **b** sudaromas kampas φ, kai $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0$?

△ Kadangi $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0$, tai $|\mathbf{a}|\neq0$, $|\mathbf{b}|\neq0$ ir $\cos\varphi>0$. Iš čia $\varphi\in[0°; 90°[$. ▲

§ 20. VEKTORIŲ SKALIARINĖS SANDAUGOS SAVYBĖS

1. Dviejų vektorių statmenumo sąlyga.

Teorema. *Kad du nenuliniai vektoriai būtų statmeni, būtina ir pakankama, kad jų skaliarinė sandauga būtų lygi nuliui*:

$$(\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{b}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0)\Leftrightarrow\mathbf{a}\perp\mathbf{b}. \qquad (1)$$

□ Būtinumas. Sakykime, $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. Tada $\varphi=(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=90°$ ir $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos 90°=0$.

Pakankamumas. Sakykime, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$. Kadangi $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, tai $|\mathbf{a}|\neq 0$, $|\mathbf{b}|\neq 0$. Tačiau $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi=0$, taigi $\cos\varphi=0$; iš čia $\varphi=90°$, t. y. $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. Todėl $(\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{b}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0)\Leftrightarrow\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. ■

2. Vektorių skaliarinė daugyba yra komutatyvi

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}. \qquad (2)$$

□ Kadangi $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=(\widehat{\mathbf{b};\mathbf{a}})$ ir $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}|$, tai $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}|\cos(\widehat{\mathbf{b};\mathbf{a}})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$. Jeigu $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ arba $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, tai iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, jog $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ ir $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=0$, t. y. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$. ■

3. Skaliarinė vektorių daugyba yra asociatyvi vektoriaus daugybos iš skaičiaus atžvilgiu:

$$(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}). \qquad (3)$$

□ Pažymėkime $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=\varphi$ ir $(\widehat{k\mathbf{a};\mathbf{b}})=\varphi_1$.

a) Sakykime, $k>0$; tada $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=(\widehat{k\mathbf{a};\mathbf{b}})$, t. y. $\varphi=\varphi_1$. Todėl $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=|k\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi_1=k|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi=k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

b) Sakykime, $k<0$; tada $k\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{a}$ ir $\varphi_1=180°-\varphi$. Vadinasi, $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=|k\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi_1=|k|\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(180°-\varphi)=-k\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|(-\cos\varphi)=k|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi=k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

c) Jeigu $k=0$ arba $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, arba $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, tai $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$ ir $k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=0$, t. y. $(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. ■

4. Vektorių skaliarinė daugyba yra distributyvi vektorių sudėties atžvilgiu

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}. \qquad (4)$$

□ Kad būtų paprasčiau įrodinėti, remsimės skaliarinės sandaugos išraiška vektorių projekcijomis (§ 19).

(4) savybė yra akivaizdi, kai $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

Sakykime, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$. Tada $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|(\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{c})=|\mathbf{a}|\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+|\mathbf{a}|\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$.

Įrodinėdami rėmėmės žinomomis vektoriaus projekcijos ašyje savybėmis (§ 9). ■

Pastebėsime, kad iš (2) ir (4) išraiškų išplaukia formulė

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}. \qquad (5)$$

Vektorių skaliarinės daugybos savybės analogiškos realiųjų skaičių daugybos savybėms, todėl lengvai galima apskaičiuoti skaliarinę sandaugą bei ją pertvarkyti.

Uždavinys. Reikia įrodyti tapatybes:

$$\text{a) } (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2; \quad (6)$$

$$\text{b) } (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2. \quad (7)$$

□ Remdamiesi (2)–(5) skaliarinės daugybos savybėmis, gauname:

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}+(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot$ $\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2=\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2$.

b) Kadangi $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$, tai (7) tapatybę įrodinėjame analogiškai. ▲

§ 21. VEKTORIŲ, DUOTŲ KOORDINATĖMIS, SKALIARINĖ SANDAUGA

Sakykime, plokštumoje duota stačiakampė Dekarto koordinačių sistema bei vektoriai $\mathbf{a}=(x_1;\ y_1)$ ir $\mathbf{b}=(x_2;\ y_2)$.

Kadangi

$$\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}, \quad \mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}, \quad (1)$$

tai, remdamiesi atitinkamomis vektorių skaliarinės daugybos savybėmis, gauname

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j})\cdot(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j})=(x_1x_2)\,\mathbf{i}^2+(x_1y_2)\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+(y_1x_2)\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+(y_1y_2)\mathbf{j}^2. \quad (2)$$

Akivaizdu, kad $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=1$ ir $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0$ ($\mathbf{i}\perp\mathbf{j}$), todėl (2) lygybė virs šitokia:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2. \quad (3)$$

Sakykime, erdvės vektoriai **a** ir **b** duoti stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje:

$$\mathbf{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1), \quad \mathbf{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2).$$

Panašiai kaip ir plokštumoje, gauname

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \quad (4)$$

Taigi dviejų vektorių skaliarinė sandauga yra lygi tų vektorių vienavardžių koordinačių sandaugų sumai.

1 uždavinys. Reikia apskaičiuoti $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, kai $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-5\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

△ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})\cdot(-5\mathbf{i}+\mathbf{j})=2\cdot(-5)+3\cdot1=-7$. ▲

2 uždavinys. Reikia apskaičiuoti $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, kai $\mathbf{a}=(2;-3;4)$, $\mathbf{b}=(5;7;-1)$.

△ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2\cdot5+(-3)\cdot7+4\cdot(-1)=-15$. ▲

3 uždavinys. Reikia rasti vektoriaus $\mathbf{a}=(x; y; z)$ ilgį.

△ Pritaikę (4) formulę, gauname

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=xx+yy+zz \quad \text{arba} \quad \mathbf{a}^2=x^2+y^2+z^2;$$

iš čia

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \quad ▲$$

§ 22. KAMPAS TARP DVIEJŲ VEKTORIŲ

Remiantis skaliarinės sandaugos apibrėžimu, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi$; čia $\varphi=(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})$. Todėl

$$\cos(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}, \tag{1}$$

kai $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$.

Kampo tarp dviejų nenulinių vektorių **a** ir **b** kosinusas yra lygus tų vektorių skaliarinei sandaugai, padalytai iš jų ilgių sandaugos.

Sakykime, erdvėje duota stačiakampė Dekarto koordinačių sistema ir vektoriai $\mathbf{a}=(x_1; y_1; z_1)$ ir $\mathbf{b}=(x_2; y_2; z_2)$.

Iš 21 paragrafo (4) formulės gauname $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \quad |\mathbf{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$$

(žr. § 21, 3 uždavinio sprendimą).

Pasinaudoję (1) lygybe, gauname formulę

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{2}$$

Kai duotos vektorių **a** ir **b** koordinatės, iš šios formulės galima rasti kampą tarp tų vektorių.

Jeigu **a** ir **b** yra plokštumos vektoriai, nagrinėjami stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje, tai (2) formulė virsta šitokia:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \tag{3}$$

1 uždavinys. Duoti du vektoriai $\mathbf{a}=(3; 4)$ ir $\mathbf{b}=(4; 3)$. Reikia rasti kampą tarp jų.

△ Įrašę vektoriaus koordinates į (3) formulę, gauname

$$\cos(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=\frac{3\cdot4+4\cdot3}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{24}{25}.$$

Taigi (iš lentelių) $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})\approx16°50'$.

2 uždavinys. Reikia rasti kampo tarp vektorių $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ kosinusą.

Naudodamiesi (2) formule, gauname

$$\cos(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=\frac{2\cdot1+2\cdot(-2)+(-1)\cdot2}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{4}{9}. \quad ▲$$

§ 23. ATKARPOS DALIJIMAS DUOTUOJU SANTYKIU

Išnagrinėsime kai kurias vektorių savybes, kuriomis remiamasi sprendžiant geometrinius uždavinius.

Akivaizdu, kad taškas $C \in [AB]$ dalija atkarpą AB duotuoju santykiu $\frac{m}{n}$, t. y.

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{m}{n}$$

tada ir tik tada, kai (55 pav.)

$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n} \overrightarrow{CB}. \qquad (1)$$

Jeigu duoti taškų A, B ir C spinduliai vektoriai taško O atžvilgiu ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$), tai, remiantis (1), galima užrašyti lygybę

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{m}{n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}),$$

iš kurios

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB}. \qquad (2)$$

(2) formulė yra ieškomojo taško C, dalijančio atkarpą AB santykiu $\frac{m}{n}$, spindulio vektoriaus išraiška duotųjų taškų A ir B spinduliais vektoriais.

Atskiru atveju, kai C yra atkarpos AB vidurio taškas,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (3)$$

Sakykime, erdvėje yra duota koordinačių sistema O, **i**, **j**, **k** ir toje sistemoje atkarpa AB duota taškų A ir B koordinatėmis: $A\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ir $B\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

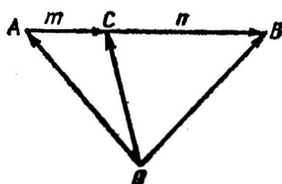
Tada taško $C\,(x;\ y;\ z)$, dalijančio atkarpą AB santykiu $\frac{m}{n}$, koordinatės, remiantis (2) lygybe, apskaičiuojamos šitaip:

$$\begin{aligned} x &= \frac{n}{m+n} x_1 + \frac{m}{m+n} x_2, \\ y &= \frac{n}{m+n} y_1 + \frac{m}{m+n} y_2, \\ z &= \frac{n}{m+n} z_1 + \frac{m}{m+n} z_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

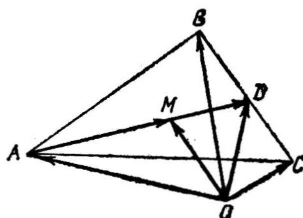
Jeigu atkarpa AB priklauso plokštumai, kurioje įvesta koordinačių sistema O, **i**, **j**, tai (4) formulės bus šitokios:

$$x=\frac{n}{m+n}x_1+\frac{m}{m+n}x_2,$$
$$y=\frac{n}{m+n}y_1+\frac{m}{m+n}y_2; \qquad (5)$$

čia $(x_1;\ y_1)$ ir $(x_2;\ y_2)$ – taškų A ir B koordinatės.



55 pav.



56 pav.

Uždavinys. Reikia įrodyti, kad bet kurio trikampio pusiaukraštinės kertasi taške M ir: 1) taško M atstumas iki kiekvienos viršūnės yra lygus 2/3 atitinkamos pusiaukraštinės ilgio; 2) imant bet kokį tašką O, teisingas sąryšis

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

△ Sakykime, taškas M atkerta 2/3 atkarpos AD ilgio (56 pav.). Tada

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=$$
$$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Tokį pat rezultatą gausime ir paėmę bet kurią kitą trikampio ABC pusiaukraštinę. Tai rodo, kad M yra bendras visų pusiaukraštinių taškas. Taigi uždavinio tvirtinimai įrodyti. ▲

Iš šio uždavinio sprendimo išplaukia: jeigu M – trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas, O – bet koks erdvės taškas, tai

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \qquad (6)$$

§ 24. TRIJŲ TAŠKŲ PRIKLAUSYMO VIENAI TIESEI SĄLYGA

Sprendžiant uždavinius bei įrodinėjant teoremas, dažnai kyla klausimas, ar trys duotieji taškai yra vienoje tiesėje.

Akivaizdu, kad trys taškai M_1, M_2 ir M_3 yra vienoje tiesėje tada ir tik

tada (57 pav.), kai vektoriai $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir $\overrightarrow{M_1M_3}$ yra kolinearūs, t. y. kai egzistuoja toks skaičius k, kad

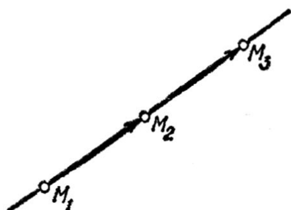
$$\overrightarrow{M_1M_3} = k\overrightarrow{M_1M_2}. \tag{1}$$

Jeigu taškus M_1, M_2 ir M_3 nustato spinduliai vektoriai taško O atžvilgiu, tai iš (1) išplaukia lygybė (58 pav.)

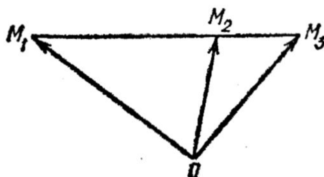
$$\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1} = k(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) \tag{2}$$

arba

$$\overrightarrow{OM_3} = k\overrightarrow{OM_2} + (1-k)\overrightarrow{OM_1}. \tag{2'}$$



57 pav.



58 pav.

Jeigu erdvėje duota koordinačių sistema O, **i**, **j**, **k** ir taškai $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ir $M_3(x_3; y_3; z_3)$, tai iš (1) (arba iš (2)), išplaukia, jog taškai M_1, M_2 ir M_3 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai egzistuoja toks skaičius k, kad

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= k(x_2 - x_1), \\ y_3 - y_1 &= k(y_2 - y_1), \\ z_3 - z_1 &= k(z_2 - z_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Atskiru atveju, kai nagrinėjama, ar trys taškai priklauso tiesei, esančiai plokštumoje, kurioje įvesta koordinačių sistema O, **i**, **j**, taškai $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ ir $M_3(x_3; y_3)$ yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai egzistuoja toks skaičius k, kad

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 &= k(x_2 - x_1), \\ y_3 - y_1 &= k(y_2 - y_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Kadangi $M_1 \neq M_2$, tai arba $x_1 \neq x_2$, arba $y_1 \neq y_2$. Sakykime, $x_1 \neq x_2$. Tada iš (4) gauname

$$k = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

ir

$$y_3 - y_1 = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1).$$

Todėl

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1). \tag{5}$$

Tą patį gautume ir kai $y_1 \neq y_2$.

Taigi trys taškai yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai teisinga (5) lygybė.

Aišku, jeigu $x_1 \neq x_2$ ir $y_1 \neq y_2$, tai (5) sąlyga yra lygiavertė sąlygai

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}. \tag{6}$$

Uždavinys. Tiesė M_1M_2 nustatyta taškais M_1 (5; 0; 1) ir M_2 (4; 1; −2). Kokios turi būti x ir y reikšmės, kad taškas M_3 (x; y; 4) priklausytų tiesei M_1M_2?

△ Naudodamiesi (3) formulėmis, gauname

$$x-5=k(4-5),$$
$$y-0=k(1-0),$$
$$4-1=k(-2-1);$$

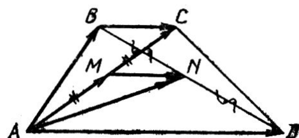
iš čia gauname $k=-1$, $y=-1$, $x=6$.

Taigi $M_3 \in (M_1M_2)$, kai $x=6$, $y=-1$. ▲

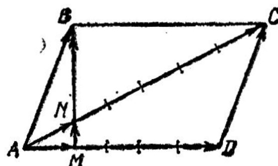
§ 25. GEOMETRINIŲ UŽDAVINIŲ SPRENDIMO VEKTORINIU METODU PAVYZDŽIAI

Geometrinį uždavinį sprendžiant vektoriniu metodu (t. y. naudojant vektorius), reikia tą uždavinį performuluoti įvedant vektorius. Toliau, remiantis atitinkamomis vektorių savybėmis, gauti tam tikrus vektorinius sąryšius, iš kurių išplauktų uždavinio sprendinys. Kaip tai daroma praktiškai, pailiustruosime pavyzdžiais.

1 uždavinys. Reikia įrodyti, kad atkarpa, jungianti trapecijos įstrižainių vidurio taškus, yra lygiagreti jos pagrindams.



59 pav.



60 pav.

△ Išnagrinėkime 59 paveikslą. Norint įrodyti, kad $(MN) \parallel (AD)$ ir $(MN) \parallel (BC)$, pakanka įsitikinti, jog vektorius $\vec{MN}$ yra kolinearus vektoriams $\vec{AD}$ ir $\vec{BC}$.

Kadangi M ir N — atkarpų AC ir BD vidurio taškai, tai

$$\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}), \quad \vec{AN}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AD}).$$

Todėl

$$\vec{MN}=\vec{AN}-\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AD})-\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BC})=\frac{1}{2}(\vec{AD}-\vec{BC}).$$

Vektorius $\vec{BC}$ yra kolinearus vektoriui $\vec{AD}$, t. y. $\vec{BC}=k_1\vec{AD}$. Tada

$$\vec{MN}=\frac{1}{2}(\vec{AD}-k_1\vec{AD})=\frac{1}{2}(1-k_1)\vec{AD}=k_2\vec{AD}.$$

Iš čia vektorius $\vec{MN}$ yra kolinearus vektoriui $\vec{AD}$ ir todėl tiesė MN yra lygiagreti tiesei AD.

Panašiai įsitikiname, kad vektoriai $\vec{MN}$ ir $\vec{BC}$ yra kolinearūs. Vadinasi, $(MN)\|(BC)$. ▲

Taigi, norint įrodyti, kad tiesės a ir b lygiagrečios, užtenka įsitikinti, jog $\vec{AB}=k\vec{CD}$; čia $[AB]\subset a$, $[CD]\subset b$, k – skaičius.

2 uždavinys. Lygiagretainio $ABCD$ (60 pav.) kraštinėje AD ir įstrižainėje AC paimti tokie taškai M ir N, kad $|AM|=\frac{1}{5}|AD|$ ir $|AN|=$ $=\frac{1}{6}|AC|$. Reikia įrodyti, kad taškai M, N ir B yra vienoje tiesėje. Kokiu santykiu taškas N dalija atkarpą MB?

△ Norint įsitikinti, jog taškai M, N ir B yra vienoje tiesėje, užtenka įrodyti, kad vektoriai $\vec{MN}$ ir $\vec{MB}$ yra kolinearūs (žr. § 24, (1) formulę).

Iš sąlygos turime

$$\vec{AM}=\frac{1}{5}\vec{AD},\quad \vec{AN}=\frac{1}{6}\vec{AC}.$$

Tada

$$\vec{MN}=\vec{AN}-\vec{AM}=\frac{1}{6}\vec{AC}-\frac{1}{5}\vec{AD}=\frac{1}{6}(\vec{AD}+\vec{DC})-\frac{1}{5}\vec{AD}=$$
$$=\frac{1}{30}(5\vec{DC}-\vec{AD}).$$

Kita vertus,

$$\vec{MB}=\vec{AB}-\vec{AM}=\vec{AB}-\frac{1}{5}\vec{AD}=\frac{1}{5}(5\vec{AB}-\vec{AD}).$$

Kadangi $\vec{AB}=\vec{DC}$, tai iš gautųjų lygybių išplaukia $\vec{MB}=6\vec{MN}$. Tai ir reiškia, kad taškai M, N ir B yra vienoje tiesėje.

Iš lygybės $\vec{MB}=6\vec{MN}$ gauname $|NB|/|MN|=5$, t. y. taškas N dalija atkarpą MB santykiu 5 : 1. ▲

Šį uždavinį galima buvo spręsti ir kitaip, remiantis 24 paragrafo (2′) formule ir 23 paragrafo (2) formule.

△ Tašku O laikysime lygiagretainio viršūnę A. Įrodysime, kad

$$\vec{AN}=k\vec{AM}+(1-k)\vec{AB}.$$

Iš uždavinio sąlygos $\vec{AD}=5\vec{AM}$, $\vec{AC}=6\vec{AN}$. Kadangi $\vec{AD}=\vec{BC}$, tai $\vec{BC}=5\vec{AM}$.

Toliau $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$; iš čia

$$6\vec{AN}=\vec{AB}+5\vec{AM} \quad \text{arba} \quad \vec{AN}=\frac{1}{6}\vec{AB}+\frac{5}{6}\vec{AM}.$$

Todėl $k=\frac{1}{6}$, $1-k=\frac{5}{6}$. Kartu įrodėme, kad taškai M, N ir B yra vienoje tiesėje.

Ieškomąjį santykį $|NB|/|MN|=m/n$ galima rasti ir remiantis 23 paragrafo (2) formule.

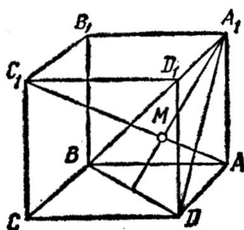
Šiuo atveju ji bus šitokia:

$$\vec{AN}=\frac{n}{m+n}\vec{AB}+\frac{m}{m+n}\vec{AM}.$$

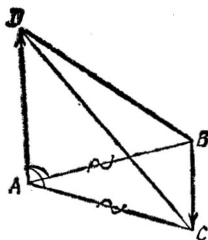
Sulyginę šią formulę su anksčiau gauta lygybe $\vec{AN}=\frac{1}{6}\vec{AB}+\frac{5}{6}\vec{AM}$, gauname $m+n=6$, $n=1$, $m=5$.

Todėl $\frac{|NB|}{|MN|}=\frac{5}{1}$. ▲

3 uždavinys. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Reikia įrodyti, kad $\triangle A_1BD$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas yra kubo įstrižainėje AC_1 ir dalija ją santykiu 1 : 2.



61 pav.



62 pav.

△ Uždavinį laikysime išspręstu (61 pav.), jeigu įrodysime, kad $\vec{AM}=k\cdot\vec{AC_1}$ (tada taškai C_1, M, A yra vienoje tiesėje). Iš trikampio pusiaukraštinių susikirtimo formulės $\vec{AM}=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1})$. Tačiau $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}=\vec{AC_1}$ (gretasienio taisyklė). Taigi $\vec{AM}=\frac{1}{3}\vec{AC_1}$, t. y. $C_1\in(AC_1)$, $M\in(AC_1)$ ir $A\in(AC_1)$. Lygybė $\vec{AM}=\frac{1}{3}\vec{AC_1}$ kartu įrodo ir tai, kad $|AM|:|MC_1|=1:2$. ▲

Taigi, norint įsitikinti, jog trys taškai M_1, M_2, M_3 priklauso vienai tiesei, užtenka įrodyti, kad $\overrightarrow{M_1M_3}=k\overrightarrow{M_1M_2}$ arba $\overrightarrow{OM_3}=k\overrightarrow{OM_2}+(1-k)\overrightarrow{OM_1}$; čia O – bet koks taškas.

Norint rasti santykį m/n, kuriuo taškas O dalija atkarpą AB, pakanka įrodyti lygybę

$$\overrightarrow{AC}=\frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$$

arba lygybę

$$\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB};$$

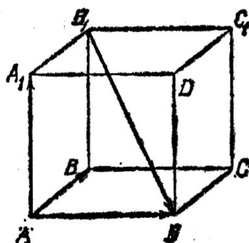
čia O – tam tikras taškas.

4 uždavinys. Duota trikampė piramidė $ABCD$ (62 pav.); $|AB|=|AC|=a$; $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}=\varphi$. Reikia įrodyti, kad $(AD)\perp(BC)$.

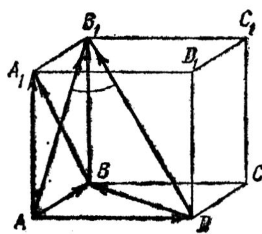
$\triangle$ $(AD)\perp(BC)$, kai $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|AD|\cdot a\cos\varphi-|AD|\cdot a\cos\varphi=0$, t. y. $(AD)\perp(BC)$. ▲

Taigi, norint įsitikinti, jog tiesės a ir b yra statmenos, pakanka įrodyti, kad $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$; čia A ir B yra tiesės a taškai, o C ir D – tiesės b taškai.

5 uždavinys. Duotas stačiakampis gretasienis (63 pav.), kurio $|B_1D|=d$, $|AB|=a$, $|AD|=b$, $|AA_1|=c$. Reikia įrodyti, kad $d^2=a^2+b^2+c^2$.



63 pav.



64 pav.

$\triangle$ Nekomplanarius vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AA_1}$ laikysime baziniais vektoriais ir jais išskaidysime vektorių $\overrightarrow{B_1D}$. Pritaikę gretasienio taisyklę, gausime

$$\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1B}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}.$$

Rasime vektoriaus $\overrightarrow{B_1D}$ skaliarinį kvadratą:

$$\overrightarrow{B_1D}^2=(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1})^2=$$

$$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}.$$

Kadangi vektoriai $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ ir $\vec{AA_1}$ yra poromis statmeni, tai

$$\vec{AB}\cdot\vec{AD}=0, \quad \vec{AB}\cdot\vec{AA_1}=0, \quad \vec{AD}\cdot\vec{AA_1}=0.$$

Todėl

$$\vec{B_1D}^2=a^2+b^2+c^2+0+0+0.$$

Iš čia

$$|B_1D|^2=d^2=a^2+b^2+c^2. \ \blacktriangle$$

Taigi, norint apskaičiuoti atkarpos (vektoriaus) ilgį, pakanka pasirinkti du nekolinearius (tris nekomplanarius) vektorius, kurių ilgiai ir kampas tarp jų yra žinomi, po to išskaidyti jais vektorių, kurio ilgį skaičiuojame, ir, remiantis formule $\mathbf{a}^2=a^2$, rasti jo skaliarinį kvadratą.

6 uždavinys. Reikia rasti kampą tarp kubo ir jo šoninės sienos įstrižainių.

$\triangle$ Sakykime, $[DB_1]$ – kubo įstrižainė, o $[AB_1]$ ir $[BA_1]$ – jo šoninės sienos įstrižainės (64 pav.).

Įvesime koordinačių sistemą A, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ taip, kad būtų $\vec{AD}=a\mathbf{i}$, $\vec{AB}=a\mathbf{j}$ ir $\vec{AA_1}=a\mathbf{k}$; čia a – kubo briaunos ilgis.

Vektorius $\vec{AB_1}$, $\vec{BA_1}$ ir $\vec{DB_1}$ išreikšime vektoriais $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ir $\mathbf{k}$:

$$\vec{AB_1}=\vec{AB}+\vec{AA_1}=a\mathbf{j}+a\mathbf{k}=0\mathbf{i}+a\mathbf{j}+a\mathbf{k},$$

$$\vec{BA_1}=-\vec{AB}+\vec{AA_1}=-a\mathbf{j}+a\mathbf{k}=0\mathbf{i}-a\mathbf{j}+a\mathbf{k},$$

$$\vec{DB_1}=\vec{DB}+\vec{AA_1}=\vec{AB}-\vec{AD}+\vec{AA_1}=a\mathbf{j}-a\mathbf{i}+a\mathbf{k}.$$

Taigi pasirinktoje koordinačių sistemoje

$$\vec{AB_1}=(0;\ a;\ a), \quad \vec{BA_1}=(0;\ -a;\ a), \quad \vec{DB_1}=(-a;\ a;\ a).$$

Naudodamiesi 22 paragrafo (2) formule, gausime

$$\cos(\widehat{\vec{AB_1};\ \vec{DB_1}})=\frac{0\cdot(-a)+a\cdot a+a\cdot a}{\sqrt{0^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+a^2+a^2}};$$

iš čia

$$\cos(\widehat{\vec{AB_1};\ \vec{DB_1}})=\frac{2a^2}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kampą $(\widehat{\vec{AB_1}; \vec{DB_1}})$ dabar nesunku rasti iš lentelių.

$$\cos(\widehat{\vec{BA_1}; \vec{DB_1}}) = \frac{0\cdot(-a)+(-a)\cdot a + a\cdot a}{\sqrt{0^2+(-a)^2+a^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+a^2+a^2}},$$

$$\cos(\widehat{\vec{BA_1}; \vec{DB_1}}) = \frac{-a^2+a^2}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{3a^2}};$$

iš čia $\cos(\widehat{\vec{BA_1}; \vec{DB_1}})=0$ ir todėl $(\widehat{\vec{BA_1}; \vec{DB_1}})=90°$. ▲

Tą uždavinį galima spręsti ir truputį kitaip.

△ Laikydami vektorius $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ ir $\vec{AA_1}$ baziniais vektoriais, išskaidysime vektorius $\vec{AB_1}$, $\vec{BA_1}$ ir $\vec{DB_1}$:

$$\vec{AB_1}=\vec{AB}+\vec{AA_1}, \quad \vec{BA_1}=\vec{AA_1}-\vec{AB}, \quad \vec{DB_1}=\vec{AB}+\vec{AA_1}-\vec{AD}.$$

Nustatę, kad $|\vec{DB_1}|=a\sqrt{3}$, $|\vec{AB_1}|=|\vec{BA_1}|=a\sqrt{2}$, ieškomųjų kampų kosinusus skaičiuosime, naudodamiesi 22 paragrafo (1) formule. ▲

Taigi, norint apskaičiuoti kampo didumą, pakanka parinkti tris nekomplanarius (du nekolinearius) bazinius vektorius, kurių ilgiai bei kampai tarp jų yra žinomi. Po to reikia rasti ieškomąjį kampą sudarančius vektorius, išskaidyti juos baziniais vektoriais ir apskaičiuoti ieškomojo kampo kosinusą iš formulės

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} \quad \text{arba} \quad \cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

7 uždavinys. M_1 ir M_2 yra $\triangle A_1B_1C_1$ ir $\triangle A_2B_2C_2$ pusiaukraštinių susikirtimo taškai. Reikia įrodyti, kad

$$\vec{M_1M_2}=\frac{1}{3}(\vec{A_1A_2}+\vec{B_1B_2}+\vec{C_1C_2}).$$

△ Naudosimės trikampio pusiaukraštinių susikirtimo formule (žr. § 23, (6) formulę). Jeigu O yra erdvės taškas, tai

$$\vec{OM_1}=\frac{1}{3}(\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}), \quad \vec{OM_2}=\frac{1}{3}(\vec{OA_2}+\vec{OB_2}+\vec{OC_2}),$$

$$\vec{M_1M_2}=\vec{OM_2}-\vec{OM_1}=\frac{1}{3}(\vec{OA_2}-\vec{OA_1})+\frac{1}{3}(\vec{OB_2}-\vec{OB_1})+$$

$$+\frac{1}{3}(\vec{OC_2}-\vec{OC_1})=\frac{1}{3}(\vec{A_1A_2}+\vec{B_1B_2}+\vec{C_1C_2}). \quad ▲$$

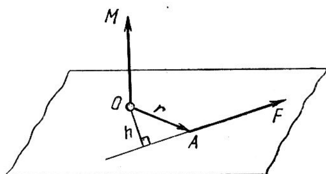
Pastebėsime, kad, sprendžiant uždavinius vektoriniu metodu, brėžinys ne visada yra būtinas (pavyzdžiui, sprendžiant 7 uždavinį). Tačiau daugeliu atvejų uždavinio sąlygas atitinkantis brėžinys labai praverčia.

§ 26. DVIEJŲ VEKTORIŲ VEKTORINĖ SANDAUGA IR JOS SAVYBĖS

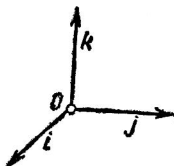
Fizikoje jėgos **F** momentas taško O atžvilgiu dažnai vaizduojamas vektoriumi $\overrightarrow{OM}$, kurio pradžia – taškas O, statmenu taško O ir vektoriaus **F** nustatomai plokštumai. Vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ ilgis apibrėžiamas kaip vektoriaus **F** ilgis, padaugintas iš peties h (h – atstumas nuo taško O iki tiesės, kurioje yra jėgos **F** vektorius) (65 pav.), arba

$$|\overrightarrow{OM}| = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{F}; \mathbf{r}});$$

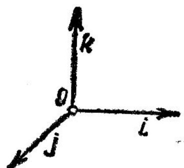
čia $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ – jėgos **F** veikimo taško spindulys vektorius. Jeigu vektorių **F** perkelsime į tašką O, tai trys vektoriai **r**, **F** ir $\overrightarrow{OM}$ nurodyta tvarka sudarys tokį pat trejetą (kairįjį arba dešinįjį), kaip ir trys vienetiniai vektoriai **i**, **j**, **k**.



65 pav.



66 pav.



67 pav.

Vienetinių vektorių **i**, **j**, **k** trejetas vadinamas *dešiniuoju*, jeigu, žiūrint iš vektoriaus **k** galo, trumpiausias posūkis nuo vektoriaus **i** į vektorių **j** bus atliekamas prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį (66 pav.), ir *kairiuoju*, jeigu tas trumpiausias posūkis bus atliekamas laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi (67 pav.).

Apibrėžimas. Vektorių **a** ir **b** *vektorine sandauga* vadinamas vektorius **c**, jeigu:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}})$;

2) vektorius **c** statmenas dauginamiesiems vektoriams **a** ir **b**: $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ ir $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;

3) vektoriai **a**, **b** ir **c** nurodyta tvarka sudaro tokį pat trejetą (dešinįjį arba kairįjį), kaip ir vienetiniai baziniai vektoriai.

Dviejų vektorių vektorinė sandauga žymima simboliu $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$.

Pirmąją sąlygą galima suformuluoti geometriškai: vektoriaus **c** ilgio skaitinė reikšmė yra lygi lygiagretainio, kurio kraštinės vaizduoja dauginamuosius vektorius, ploto skaitinei reikšmei (68 pav.).

Išnagrinėsime keletą vektorinės sandaugos savybių.

1. Vektorinė sandauga yra nulinis vektorius, jeigu vektorius $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ arba $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, arba vektoriai **a** ir **b** yra kolinearūs.

□ Iš vektorinės sandaugos apibrėžimo pirmosios sąlgos gauname $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=0$, kai $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ arba $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, arba $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=0$, t. y. $\sin(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=0$. ■

Iš čia išplaukia, kad lygybė $[\mathbf{a};\mathbf{b}]=\mathbf{0}$ yra dviejų vektorių kolinearumo sąlyga.

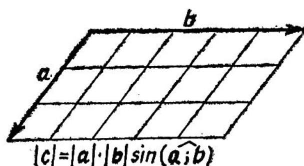
2. Sukeitus dauginamųjų vektorių tvarką, sandaugos vektorius išlieka to paties ilgio, bet kryptis pasikeičia priešinga: $[\mathbf{a};\mathbf{b}]=-[\mathbf{b};\mathbf{a}]$.

□ Iš vektorinės sandaugos apibrėžimo pirmosios sąlygos išplaukia:

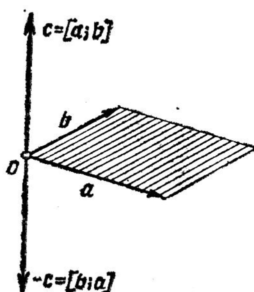
$$|[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}}),$$

$$|[\mathbf{b};\ \mathbf{a}]|=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{a}|\cdot\sin(\widehat{\mathbf{b};\mathbf{a}}).$$

Kadangi $(\widehat{\mathbf{a};\mathbf{b}})=(\widehat{\mathbf{b};\mathbf{a}})$, tai $|[\mathbf{a};\mathbf{b}]|=|[\mathbf{b};\mathbf{a}]|$.



68 pav.



69 pav.

Vektoriai $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ ir $[\mathbf{b};\mathbf{a}]$ turi būti statmeni dauginamųjų vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ plokštumai. Kadangi vektoriai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ir $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ (taip pat vektoriai $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ ir $[\mathbf{b};\mathbf{a}]$) sudaro dešinįjį (kairįjį) trejetą, tai vektoriai $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ ir $[\mathbf{b};\mathbf{a}]$ turi būti priešingai nukreipti (69 pav.). ■

3. Vektorinė daugyba yra asociatyvi skaliarinio daugiklio atžvilgiu:

$$[m\mathbf{a};\ \mathbf{b}]=[\mathbf{a};\ m\mathbf{b}]=m[\mathbf{a};\ \mathbf{b}].$$

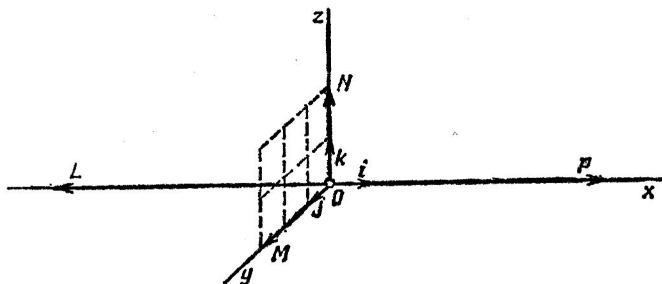
4. Vektorinė daugyba yra distributyvi:

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b};\ \mathbf{c}]=[\mathbf{a};\ \mathbf{c}]+[\mathbf{b};\ \mathbf{c}].$$

3 ir 4 vektorinės daugybos savybes laikysime teisingomis be įrodymo.

Uždavinys. Reikia pavaizduoti brėžinyje vektorius $\mathbf{a}=3\mathbf{j}$ ir $\mathbf{b}=2\mathbf{k}$, taip pat rasti ir pavaizduoti vektorines sandaugas $[\mathbf{a};\mathbf{b}]$, $[\mathbf{b};\mathbf{a}]$.

△ Nubraižykime stačiakampę koordinačių sistemą O, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (70 pav.). Vektorių $\mathbf{a}=3\mathbf{j}$ vaizduos kryptinė ašies Oy atkarpa OM; vektorių $\mathbf{b}=2\mathbf{k}$ – kryptinė ašies Oz atkarpa ON. Iš vektorinės sandaugos apibrėžimo trečiosios sąlygos išplaukia, kad vektorius $\mathbf{c}=[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ su vektoriais $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ turi sudaryti tokią pat (kairiąją arba dešiniąją) bazę, kaip ir vektorinė



70 pav.

bazė **i**, **j**, **k**. 70 paveiksle matome, kad vektoriai **i**, **j**, **k** sudaro kairiąją vektorinę bazę. Kadangi vektorius **c** turi būti kolinearus vektoriui **i**, tai aišku, kad šiuo atveju jo kryptis sutaps su vektoriaus **i** kryptimi. Dabar apskaičiuosime vektoriaus **c** ilgį:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}),$$

$$|\mathbf{c}| = |3\mathbf{j}| \cdot |2\mathbf{k}| \sin 90^\circ = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Taigi vektorius $\mathbf{c} = \overrightarrow{OP} = 6\mathbf{i}$.

Akivaizdu, kad vektorius $[\mathbf{b}; \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}; \mathbf{b}] = -\mathbf{c} = -6\mathbf{i}$, $[\mathbf{b}; \mathbf{a}] = \overrightarrow{OL}$. ▲

§ 27. VEKTORIŲ, DUOTŲ KOORDINATĖMIS, VEKTORINĖ SANDAUGA

Sakykime, turime du vektorius, išskaidytus ortais:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

Užrašysime vektorinę sandaugą koordinatėmis ir perdirbsime ją, remdamiesi 3 ir 4 savybėmis:

$$[\mathbf{a}; \mathbf{b}] = [x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k};\ x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}] = x_1x_2[\mathbf{i}; \mathbf{i}] +$$
$$+ x_1y_2[\mathbf{i}; \mathbf{j}] + x_1z_2[\mathbf{i}; \mathbf{k}] + y_1x_2[\mathbf{j}; \mathbf{i}] + y_1y_2[\mathbf{j}; \mathbf{j}] + y_1z_2[\mathbf{j}; \mathbf{k}] +$$
$$+ z_1x_2[\mathbf{k}; \mathbf{i}] + z_1y_2[\mathbf{k}; \mathbf{j}] + z_1z_2[\mathbf{k}; \mathbf{k}]. \qquad (1)$$

Remiantis pirmąja vektorinės sandaugos savybe

$$[\mathbf{i}; \mathbf{i}] = [\mathbf{j}; \mathbf{j}] = [\mathbf{k}; \mathbf{k}] = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Iš vektorinės sandaugos apibrėžimo išplaukia

$$[\mathbf{i}; \mathbf{j}] = \mathbf{k}, \ [\mathbf{j}; \mathbf{k}] = \mathbf{i}, \ [\mathbf{k}; \mathbf{i}] = \mathbf{j}. \qquad (3)$$

Sukeitus dauginamuosius vektorius vietomis, vektorinės sandaugos ženklas pasikeičia priešingu. Todėl

$$[\mathbf{j}; \mathbf{i}] = -\mathbf{k}, \ [\mathbf{k}; \mathbf{j}] = -\mathbf{i}, \ [\mathbf{i}; \mathbf{k}] = -\mathbf{j}. \qquad (4)$$

Atsižvelgę į anksčiau nagrinėtas (2)—(4) lygybes, (1) vektorinę sandaugą galime užrašyti šitaip:

$$[\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}]=x_1y_2\mathbf{k}-x_1z_2\mathbf{j}-y_1x_2\mathbf{k}+y_1z_2\mathbf{i}+z_1x_2\mathbf{j}-z_1y_2\mathbf{i}$$

arba

$$[\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}]=(y_1z_2-z_1y_2)\,\mathbf{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\,\mathbf{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\,\mathbf{k}. \qquad (5)$$

(5) formulė yra dviejų vektorių, duotų koordinatėmis, vektorinės sandaugos išraiška.

Uždavinys. Reikia rasti vektorių $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektorinę sandaugą.

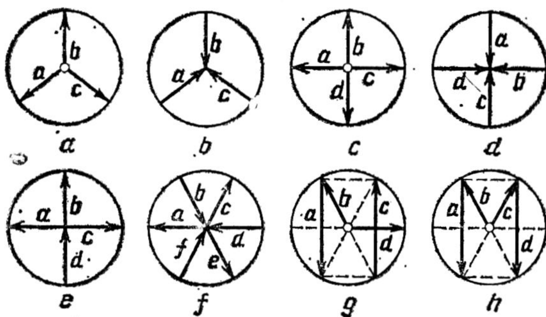
$$\triangle\ [\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}]=\big(3\cdot1-(-1)\cdot2\big)\mathbf{i}+(-1\cdot1-1\cdot2)\,\mathbf{j}+$$
$$+(2\cdot2-3\cdot1)\,\mathbf{k}\,;\ [\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}]=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}.\ \blacktriangle$$

I SKYRIAUS UŽDAVINIAI

1. Apskritimas padalytas į tris, keturias arba šešias lygias dalis (71 pav.). Kiekvienu atveju raskite duotųjų vektorių sumą.

2. Kūną veikia dvi jėgos $\mathbf{F}_1$ ir $\mathbf{F}_2$, $F_1=8$ N ir $F_2=6$ N, sudarančios 90° kampą. Raskite jų atstojamąją jėgą.

3. Plaukiko greitis stovinčiame vandenyje 4 km/h, o upės tėkmės greitis 3 km/h. Nustatykite, kokia kryptimi turi plaukti plaukikas, kad atplauktų į artimiausią priešingo upės kranto tašką? (Uždavinį spręskite grafiškai.)



71 pav.

4. Taisyklingojo šešiakampio centrą veikia trys 1 N jėgos, nukreiptos į tris iš eilės esančias viršūnes. Raskite atstojamosios jėgos didumą ir kryptį.

5. Nubrėžkite keturis vektorius **a**, **b**, **c** ir **d**, kurių suma būtų lygi vektoriui: a) **a**; b) **b**; c) **c**; d) **d**.

6. Nubrėžkite bet kokį penkiakampį *ABCDE* ir raskite vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$ sumą. Atsakymą paaiškinkite.

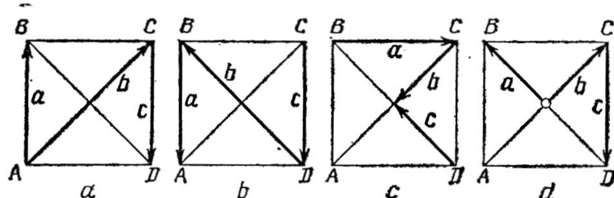
7. Duotas tetraedras *ABCS*. Raskite vektorių sumą: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CS}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}$.

8. Duota taisyklingoji keturkampė piramidė *ABCDS* (*S* — viršūnė, *O* — aukštinės pagrindas). Įrodykite, kad vektorių $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{SC}$ suma yra lygi vektorių $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}$ sumai.

9. Plokštumoje duoti keturi nekolinearūs vektoriai **a**, **b**, **c** ir **d**. Yra žinoma, kad **a**+**b**=**c**+**d**. Nustatykite, ar iš tų vektorių galima sudaryti keturkampį?

10. Duotas kvadratas ir nubrėžtos jo įstrižainės (72 pav.). Raskite kiekvieno kvadrato trijų vektorių **a**, **b** ir **c** sumą **a**+**b**+**c**.

11. Įrodykite, kad iš bet kokio trikampio pusiaukraštinių galima sudaryti trikampį.



72 pav.

12. Duotas lygiagretainis $ABCD$; $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$, O – įstrižainių susikirtimo taškas. Vektorius $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CO}$ išreikškite vektoriais **a** ir **b**.

13. Duotas stačiakampis $ABCD$ ir nubrėžtos jo įstrižainės, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$. Išreikškite vektorius $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$ vektoriais **a** ir **b**.

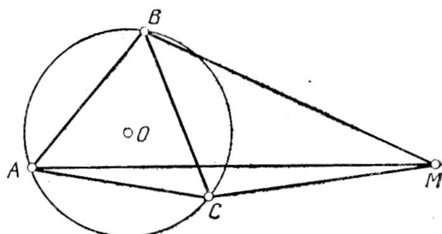
14. Duotas trikampis ABC ir nubrėžta jo vidurinė linija MN ($M \in AB$); $\overrightarrow{MB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{NC}=\mathbf{b}$ ir $\overrightarrow{CA}=\mathbf{c}$. Išreikškite vektorius $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}-$ $-\overrightarrow{BN}$ vektoriais **a**, **b** ir **c**.

15. $ABCS$ – tetraedras. Raskite vektorius: 1) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$; 2) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}$; 3) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$.

16. Duoti vektoriai **a** ir **b**. Nubrėžkite vektorius: 1) **a**−**b**; 2) −**a**−**b**; 3) −**a**+**b**.

17. Duoti trys vektoriai **a**, **b** ir **c**. Nubrėžkite vektorius: 1) **a**+**b**−**c**; 2) −**a**+**b**+**c**; 3) **a**−**b**+**c**; 4) **a**−**b**−**c**; 5) −**a**+**b**−**c**; 6) −**a**−**b**+**c**; 7) −**a**−**b**−**c**.

18. Trys jėgos pavaizduotos vektoriais $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ (taškai A, B ir C yra į apskritimą, kurio centras O, įbrėžto taisyklingojo trikampio viršūnės) (73 pav.). Raskite tų jėgų, veikiančių taške M, atstojamąją.



73 pav.

19. Kampas tarp vektorių **a** ir **b** lygus 120°, $|\mathbf{a}|=5$, $|\mathbf{b}|=3$. Raskite $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

20. Duotas vektorius $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$ ($\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$). Kokios turi būti k reikšmės, kad būtų: 1) $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$; 2) $|\mathbf{a}|>|\mathbf{b}|$; 3) $|\mathbf{a}|<|\mathbf{b}|$?

21. Duotas trikampis ABC ir nubrėžta jo pusiaukraštinė AD. Įrodykite, kad $\overrightarrow{AD}=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

22. Nustatykite k reikšmes, su kuriomis vektoriaus $k\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$) ilgis: 1) lygus vektoriaus **a** ilgiui; 2) didesnis kaip $|3\mathbf{a}|$; 3) mažesnis kaip $|5\mathbf{a}|$.

23. Iš kokio skaičiaus reikia padauginti nenulinį vektorių **a**, norint gauti tokį vektorių **b**, kad būtų: 1) $|\mathbf{b}|=5$ ir $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$; 2) $|\mathbf{b}|=1$ ir $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$.

24. Tiesėje iš eilės paimti trys taškai M, N ir P; taškas A yra atkarpos MN vidurio taškas, o taškas B – atkarpos NP vidurio taškas. Išreikškite $\overrightarrow{AB}$ vektoriumi $\overrightarrow{PM}$.

25. Iš kokio skaičiaus reikia padauginti vektorių **a**, kad: 1) vektorius $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$ būtų vienetinio ilgio; 2) $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$ ilgis būtų lygus 5 ir $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$.

26. Duoti trys tokie tiesės taškai A, B ir C, kad $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CB}$. Išreikškite vektorių $\overrightarrow{AB}$ vektoriumi $\overrightarrow{CB}$.

27. Duotas trikampis ABC. Jo pusiaukraštinių susikirtimo tašką pažymėkime raide M. Įrodykite, kad $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$.

28. Duotas stačiakampis $ABCD$ ir nubrėžtos jo įstrižainės. Žinoma, kad $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$. Išreikškite vektorius $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{BD}$ vektoriais **a** ir **b**.

29. Duotas vektorius $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. Raskite vektorių **b**, kai $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$, vektoriaus **b** abscisė lygi vektoriaus **a** ordinatei, o vektoriaus **b** ordinatė lygi nuliui.

30. Duota trikampė piramidė $ABCS$. Nubrėžkite vektorius: 1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$; 2) $-\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$; 3) $\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$.

31. Nustatykite, ar keturkampis, kurio viršūnės $A\ (-3;\ 1)$, $B\ (3;\ 6)$, $C\ (2;\ 2)$ ir $D\ (-4;\ -3)$ yra lygiagretainis.

32. Vektorius $\overrightarrow{AB}$ kolinearus vektoriui $\mathbf{a}=(3;\ -4)$, o taško A koordinatės yra $(8;\ 5)$. Raskite taško B koordinates.

33. Vektorius **a** kolinearus vektoriui $\mathbf{b}=(-2;\ 5)$; jo ordinatė lygi 15. Raskite vektoriaus **a** abscisę.

34. Vektorius $\mathbf{a}=(-3;\ 7)$ kolinearus vektoriui **b**. Raskite vektoriaus **b** ordinatę, jeigu jo abscisė lygi 6.

35. Raskite didumą kampo, kurį sudaro kubo ir jo sienos įstrižainės, išvestos iš vienos viršūnės.

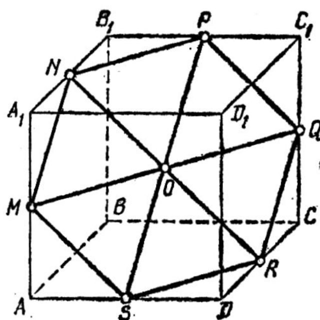
36. Pažymėkite tašką $M\ (6;\ -3;\ 6)$ ir nustatykite jo spindulio vektoriaus ilgį.

37. Raskite įstrižaines lygiagretainio, kurio kraštinės vaizduoja vektorius $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ir $\mathbf{b}=\mathbf{k}-2\mathbf{j}$.

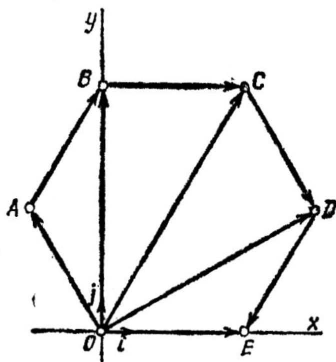
38. Raskite kampą tarp lygiagretainio įstrižainių, kai jo kraštinės yra vektoriai $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ir $\mathbf{b}=-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

39. Raskite vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ skaliarinę sandaugą, kai $A\ (2;\ -1;\ 2)$, $B\ (3;\ 0;\ 1)$.

40. Duotas vektorius $\mathbf{a}=(4;\ 5)$. Raskite kokio nors vektoriaus **b**, kolinearaus vektoriui **a**, koordinates. Kiek sprendinių turi uždavinys?



74 pav.



75 pav.

41. Duotas kubo pjūvis (74 pav.). Bet kurią brėžinio atkarpą galima laikyti vektoriumi. Užrašykite keletą komplanarių bei keletą nekomplanarių vektorių trejetų (pavyzdžiui, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{NP}$ yra komplanarūs vektoriai).

42. Duotas vektorius $\mathbf{a}=(-1;\ 2;\ 2)$. Raskite tos pačios krypties vienetinio vektoriaus koordinates.

43. Duoti du taškai $A\ (2;\ 1)$ ir $B\ (10;\ 7)$. Vektorių $\overrightarrow{AB}$ išreikškite ortais **i** ir **j**.

44. Plokštumoje duotas taisyklingasis šešiakampis. Visus 75 paveiksle pavaizduotus vektorius išreikškite ortais **i** ir **j**, kai žinoma, kad $|\overrightarrow{OE}|=4$.

45. Plokštumoje duoti trys taškai $A\ (0;\ 8)$, $B\ (6;\ 8)$ ir $C\ (6;\ 0)$. Išreikškite vektoriais **i** ir **j** šiuos vektorius: 1) $\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{OB}$; 3) $\overrightarrow{OC}$; 4) $\overrightarrow{AB}$; 5) $\overrightarrow{BA}$; 6) $\overrightarrow{CA}$.

46. M, N, P, Q, R, S, T yra kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų vidurio taškai. Baze laikykite vektorius $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\mathbf{c}$. Išskaidykite baziniais vektoriais **a**, **b**, **c** šiuos vektorius: 1) $\overrightarrow{DT}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$; 3) $\overrightarrow{NP}$; 4) $\overrightarrow{PQ}$; 5) $\overrightarrow{QS}$; 6) $\overrightarrow{B_1D}$; 7) $\overrightarrow{RM}$; 8) $\overrightarrow{RN}$ (76 pav.).

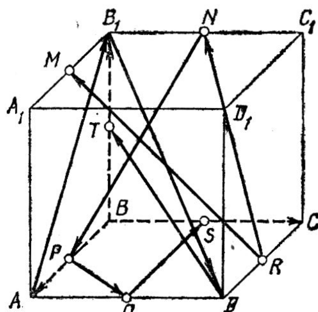
47. Duotas taisyklingasis šešiakampis $ABCDEF$. Baze laikykite vektorius $\overrightarrow{AF}=\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$. Išskaidykite baziniais vektoriais **a**, **b** šiuos vektorius: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{DE}$; 5) $\overrightarrow{EF}$; 6) $\overrightarrow{AD}$; 7) $\overrightarrow{AE}$; 8) $\overrightarrow{FC}$; 9) $\overrightarrow{DB}$; 10) $\overrightarrow{BE}$.

48. Nubrėžkite vektorių $\overrightarrow{MN}$, raskite jo ilgį ir projekcijas koordinačių ašyse, kai $M(6; -4; 3)$ ir $N(3; 2; 1)$.

49. Raskite vektoriaus **a** projekciją vektoriaus **b** kryptimi ir vektoriaus **b** projekciją vektoriaus **a** kryptimi, kai $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=1$, o kampas tarp jų lygus 120°.

50. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite kampus tarp vektorių: 1) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{D_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DD_1}$; 3) $\overrightarrow{AB_1}$ ir $\overrightarrow{D_1C}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{A_1D_1}$; 5) $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{B_1D}$; 6) $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{B_1D}$.

51. Ką galima pasakyti apie kampą tarp dviejų vektorių, kai jų skaliarinė sandauga yra: 1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$; 2) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0$; 3) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$?
Raskite skaliarines sandaugas šių vektorių: 4) **a** ir $-\mathbf{a}$; 5) **a** ir $k\mathbf{a}$.



76 pav.

52. Raskite kampą tarp vektoriaus $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ir abscisių ašies, kai $A(-2; 3)$, $B(0; 8)$, $C(5; 3)$ ir $D(10; 5)$.

53. Raskite vektoriaus $\mathbf{c}=4\mathbf{b}-\mathbf{a}$ ilgį, kai žinoma, kad $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=1$, o vektoriai **a** ir **b** sudaro 60° kampą.

54. Duotas vektorius $\mathbf{a}=(2\sqrt{3}; 2)$. Vektorių **a** ir **b** projekcijos abscisių ašyje yra lygios, o kampas tarp vektoriaus **b** ir abscisių ašies yra du kartus didesnis už kampą tarp vektoriaus **a** ir abscisių ašies. Raskite vektoriaus **b** ordinatę.

55. Nustatykite kampą tarp vektorių: 1) **i** ir $(\mathbf{j}+\mathbf{k})$; 2) **j** ir $(\mathbf{i}-\mathbf{k})$; 3) **k** ir $(2\mathbf{j}-3\mathbf{k})$.

56. Trikampio ABC viršūnės yra $A(5; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$ ir $C(3; -1; 2)$. Raskite to trikampio kampų didumus.

57. Duotas vektorius $\mathbf{a}=(3; -5)$. Raskite bet kokių dviejų vektorių, statmenų vektoriui **a**, koordinates.

58. Duotas vektorius $\mathbf{c}=(4; -7)$. Raskite kokio nors vektoriaus **b**, statmeno vektoriui **c**, koordinates. Kiek sprendinių turi uždavinys?

59. Duotas vektorius $\mathbf{a}=(1; 2; -3)$. Jam statmeno vektoriaus **b** abscisė lygi 3, ordinatė lygi 6. Raskite vektoriaus **b** aplikatę.

60. Duotas vektorius $\mathbf{a}=(3; -1; 2)$. Vektorius **b** statmenas vektoriui **a**. Ar galima rasti vektoriaus **b** abscisę ir ordinatę, jeigu vektoriaus **b** aplikatė lygi 5? Kiek sprendinių turi uždavinys?

61. Duotas vektorius $\mathbf{a}=(3; -4)$. Jam statmeno vektoriaus **b** abscisė lygi 8. Raskite vektoriaus **b** ordinatę.

62. Duotas vektorius $\mathbf{a}=(5; 3)$. Jam statmeno vektoriaus **b** ordinatė lygi 10. Raskite vektoriaus **b** abscisę.

63. Raskite kampą tarp vektoriaus $\mathbf{a}=(3; 4)$ ir abscisių ašies.

64. Raskite kampą tarp vektoriaus $\mathbf{b}=(-8; 6)$ ir ordinačių ašies.

65. Atskliauskite ir suprastinkite šiuos reiškinius: 1) $(\mathbf{b}-\mathbf{c})\mathbf{a}+\mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{b}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$; 2) $\mathbf{i}(\mathbf{j}+\mathbf{k})+\mathbf{j}(\mathbf{i}-\mathbf{k})+2\mathbf{i}$.

66. Duoti vektoriai $\mathbf{a}=(1; -2; 3)$; $\mathbf{b}=(2; 2; -1)$; $\mathbf{c}=(0; 1; -2)$; $\mathbf{d}=(2; -1; 0)$. Apskaičiuokite: 1) $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$; 2) $[\mathbf{a}; \mathbf{c}]$; 3) $[\mathbf{b}; \mathbf{c}]$; 4) $[\mathbf{a}; \mathbf{d}]$; 5) $[(\mathbf{a}+\mathbf{b}); \mathbf{c}]$; 6) $[(\mathbf{a}-\mathbf{b}); \mathbf{c}]$; 7) $[(\mathbf{a}+\mathbf{b}); (\mathbf{d}-\mathbf{c})]$; 8) $[(\mathbf{a}+2\mathbf{d}); \mathbf{c}]$; 9) $[(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}); (\mathbf{c}+\mathbf{d})]$; 10) $[(\mathbf{a}-\mathbf{b}); (3\mathbf{c}+2\mathbf{d})]$.

67. Duoti du vektoriai $\mathbf{a}=2\mathbf{i}$ ir $\mathbf{b}=3\mathbf{k}$. Raskite ir nubrėžkite vektorių $\mathbf{c}=[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$.

68. Duoti du vektoriai $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{k}$ ir $\mathbf{b}=4\mathbf{k}$. Raskite ir nubrėžkite vektorių $\mathbf{c}=[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$.

69. Raskite jėgos $\mathbf{F}=3\mathbf{i}+\mathbf{k}$ momentą taško M (2; −1; 3) atžvilgiu, kai jėgos veikimo taškas yra N (2; 1; 4).

70. Jėgos $\mathbf{F}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ veikimo taškas yra M (1; 5; −2). Raskite jėgos $\mathbf{F}$ momentą koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

71. Raskite plotą lygiagretainio, kurio kraštinėmis laikomi vektoriai $\mathbf{a}=(3;\ 4)$ ir $\mathbf{b}=(4;\ -3)$.

72. Trikampio viršūnės yra taškuose A (0; 2; 6), B (4; 0; 0) ir C (8; −2; 1). Raskite trikampio plotą.

73. Duotas lygiagretainis A (1; −2), B (−2; 2), C (4; 10) ir D (7; 6). Apskaičiuokite jo plotą ir aukštines.

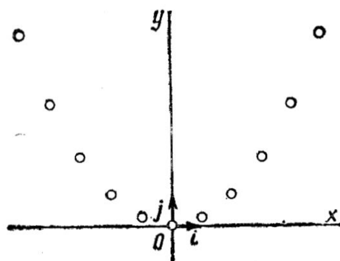
II SKYRIUS

Tiesė

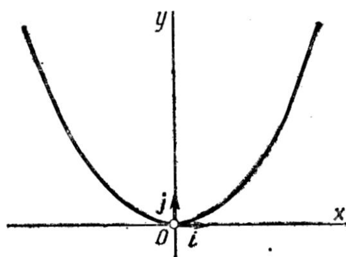
§ 28. LYGTIS SU DVIEM NEŽINOMAISIAIS IR JOS GRAFIKAS

Žinome, kad lygties su dviem nežinomaisiais sprendiniu vadinama bet kuri sutvarkyta kintamųjų reikšmių pora, kurią įrašius į duotąją lygtį, gaunama teisinga lygybė.

Sakykime, turime lygtį $3x+2y-2=0$. Sutvarkyta skaičių pora (4; −5) (pirmoje vietoje rašome kintamojo x, antroje vietoje – kintamojo y reikšmę) yra lygties sprendinys, nes $3\cdot 4+2\cdot(-5)-2=0$. Pora (5; 7) nėra duotosios lygties sprendinys, nes $3\cdot 5+2\cdot 7-2\neq 0$. Laisvai



77 pav.



78 pav.

pasirinkę x reikšmes ir radę jas atitinkančias y reikšmes, turėsime be galo daug skaičių porų – tos lygties sprendinių. Atitinkamas kintamųjų x ir y reikšmių poras galima laikyti plokštumos taškų koordinatėmis. Tų taškų (sprendinių) aibė vadinama lygties *grafiku.*

Sakykime, duota lygtis $x^2-4y=0$. Reikia nubraižyti jos grafiką.

Tuo tikslu sudarome lentelę

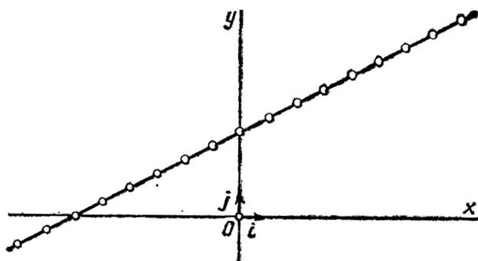
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25

Po to koordinačių sistemoje atidedame taškus, kurių koordinatės surašytos lentelėje (77 pav.). Tuos taškus sujungiame glodžia linija. Gauname lygties $x^2-4y=0$ grafiką. Pastebėsime, jog grafikas bus tikslesnis, jeigu imsime daugiau taškų (sprendinių) (78 pav.).

Išnagrinėsime kitą pavyzdį. Reikia nubraižyti lygties $y=\frac{x}{2}+3$ grafiką. Sudarome atitinkamų kintamųjų x ir y reikšmių lentelę

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
y	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	2,5	2	1,5	1	0,5	0	−0,5	−1

Koordinačių plokštumoje pažymime taškus, kurių koordinatės surašytos lentelėje. Matome (79 pav.), kad pažymėtieji taškai yra tiesėje. Tą faktą įrodysime vėliau. Kiekviena skaičių pora (0; 3), (1; 3, 5), (2; 4), ..., (−8; −1) (čia pirmoje vietoje rašoma kintamojo x, o antroje – kintamojo y reikšmė) yra lygties $y=\frac{x}{2}+3$ sprendinys.



79 pav.

Apibrėžimas. *Lygties su dviem nežinomaisiais grafiku* vadinama aibė taškų, kurių koordinatės yra tos lygties sprendiniai.

Taigi lygties $f(x, y)=0$ grafikas plokštumoje yra tam tikra kreivė.

§ 29. TIESĖ IR JOS LYGTIS

Sprendžiant įvairius uždavinius su tiesėmis, labai dažnai tenka ieškoti tų tiesių lygčių; naudojantis vektoriais tas darbas labai supaprastėja. Toliau tiesės padėtį plokštumoje apibūdinsime pasitelkę vektorius bei taškus. Pavyzdžiui: 1) tiesė l_1 eina per taškus M_1 ir M_2, 2) tiesė l_2 eina per tašką M_1 lygiagrečiai vektoriui **a**, 3) tiesė l_3 eina per tašką M_1 statmenai vektoriui **n**, 4) tiesė l_4 eina per tašką M_1 ir sudaro kampą φ su vektoriumi **i**. Aišku, taip nusakytos tiesės padėtis plokštumoje yra visiškai apibrėžta.

Bet koks vektorius **a**, lygiagretus tiesei l, yra vadinamas tos tiesės *krypties vektoriumi.*

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad kiekviena tiesė turi kiek norima daug krypties vektorių ir visi jie yra tarpusavyje lygiagretūs.

Bet koks vektorius **n**, statmenas tiesei l, yra vadinamas tiesės *normalės vektoriumi* (*normaliniu vektoriumi*).

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad kiekviena tiesė turi kiek norima daug normalinių vektorių ir visi jie yra tarpusavyje lygiagretūs.

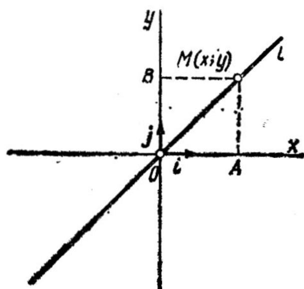
Jeigu tiesėje l parinksime bet kokius du taškus M_1 ir M_2, tai vektorius $\overrightarrow{M_1M_2}$ bus tiesės M_1M_2 krypties vektorius. Atkreipsime dėmesį, kad vektorius $\overrightarrow{M_2M_1}$ taip pat bus tos tiesės krypties vektorius, nes $\overrightarrow{M_1M_2}=$ $=-\overrightarrow{M_2M_1}$.

Sudaryti linijos lygtį – tai reiškia užrašyti tos aibės taškų, tenkinančių juos apibrėžiančias sąlygas, koordinačių sąryšį.

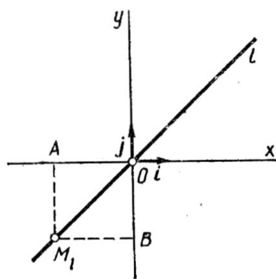
Paaiškinsime tai pavyzdžiais.

1 uždavinys. Reikia užrašyti pirmojo ir trečiojo koordinatinio kampo pusiaukampinės lygtį.

△ Sakykime, tiesė l yra pirmojo ir trečiojo koordinatinio kampo pusiaukampinė (80 pav.). Imkime bet kurį pusiaukampinės l tašką $M(x; y)$



80 pav.



81 pav.

ir nustatykime sąryšį tarp koordinačių x ir y. Tuo tikslu turime rasti koordinačių x ir y sąryšį, kurį tenkintų kiekvieno pusiaukampinės taško (ir tiktai jo) koordinatės.

Kampo xOy pusiaukampinė l yra aibė taškų, vienodai nutolusių nuo kampo kraštinių $|AM|=|BM|$. Tai bendra visų tiesės l taškų (ir tiktai jų) savybė. Iš čia išplaukia, kad spindulio OM taško $M(x; y)$ koordinatės (80 pav.) tenkina lygtį

$$y=x.$$

Spindulio OM_1 bet kurio taško koordinatės x ir y (81 pav.) taip pat tenkina lygtį $y=x$, nes jų absoliutiniai didumai lygūs ir abi jos neigiamos. Tiesei l nepriklausančių taškų koordinatės lygties $y=x$ netenkina. ▲

Apibrėžimas. Lygtis $F(x; y)=0$, kurią tenkina visų linijos taškų koordinatės (ir tiktai jos), vadinama *linijos lygtimi.*

Iš linijos lygties apibrėžimo išplaukia, kad bet kuris plokštumos taškas, kurio koordinatės tenkina linijos lygtį, priklauso tai linijai ir atvirkščiai, kiekvienas linijos taškas tenkina jos lygtį.

2 uždavinys. Reikia rasti antrojo ir ketvirtojo koordinatinio kampo pusiaukampinės lygtį.

△ Visi antrojo ir ketvirtojo koordinatinio kampo pusiaukampinės taškai (ir tiktai jie) yra vienodai nutolę nuo koordinačių ašių, bet, skirtingai

nuo pirmojo ir trečiojo koordinatinio kampo pusiaukampinės, kiekvieno jos taško abscisė ir ordinatė yra priešingų ženklų. Algebriškai ši savybė užrašoma lygtimi

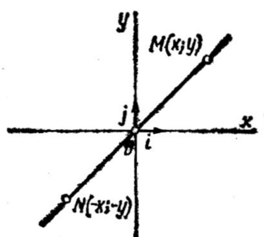
$$y = -x.$$

Tai ir yra antrojo ir ketvirtojo koordinatinio kampo pusiaukampinės lygtis. ▲

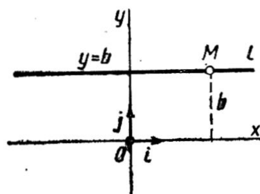
Kadangi tiesė visiškai nusakoma dviem taškais, tai nuo šiol, norėdami ją nubrėžti, ieškosime ne daugiau dviejų jos taškų (82 pav.).

3 uždavinys. Reikia rasti lygtį tiesės, lygiagrečios ašiai Ox ir kertančios ašį Oy taške, kurio ordinatė lygi b.

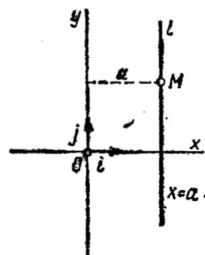
△ Sakykime, tiesė l yra lygiagreti ašiai Ox ir nutolusi nuo jos atstumu b (83 pav.), o M yra bet kuris tos tiesės taškas. Ieškomoji tiesė – tai aibė koordinačių plokštumos taškų, kurių ordinatė yra pastovi ir lygi b, esant bet kokiai abscisei.



82 pav.



83 pav.



84 pav.

Šia savybe pasižymi tiktai tiesės l taškai, nes bet koks tai tiesei nepriklausantis taškas tenkina sąryšį $y>b$ arba $y<b$. Algebriškai ta savybė užrašoma šitaip:

$$y = b.$$

Tai ir yra lygtis tiesės, lygiagrečios ašiai Ox. Aišku, kai $b>0$, tiesė l yra aukščiau ašies Ox, o kai $b<0$ – žemiau jos. ▲

Atkreipkite dėmesį į tai, kad linijos lygtyje, kaip matyti iš pastarojo pavyzdžio, gali būti tik viena koordinatė.

4 uždavinys. Reikia rasti ašies Ox lygtį.

△ Ašis Ox – tai aibė plokštumos $O\mathbf{ij}$ taškų, kurių ordinatės lygios nuliui, esant bet kokiai abscisei. Algebriškai ta savybė užrašoma lygtimi

$$y = 0.$$

Tai ir yra ašies Ox lygtis. Akivaizdu, kad ašies Ox lygtis yra tiesės, lygiagrečios ašiai Ox, lygties $y=b$ atskiras atvejis. Iš tikrųjų, kai $b=0$, gauname ašies Ox lygtį. ▲

5 uždavinys. Reikia užrašyti lygtį tiesės, lygiagrečios ašiai Oy ir kertančios ašį Ox taške, kurio abscisė lygi a.

△ Sakykime, tiesė l yra lygiagreti ordinačių ašiai ir nutolusi nuo tos ašies atstumu a (84 pav.). Tarkime, kad M yra bet kuris tos tiesės taškas. Ieškomoji tiesė – tai aibė plokštumos taškų, kurių abscisė yra pastovi ir lygi a, esant bet kokiai ordinatei.

Tą savybę turi tiktai tiesės l taškai, nes bet kuris tai tiesei nepriklausantis taškas tenkina nelygybę $x>a$ arba $x<a$. Algebriškai ta savybė užrašoma šitaip:

$$x=a.$$

Tai ir yra ieškomoji tiesės lygtis. Aišku, kai $a>0$, tiesė l yra į dešinę nuo ašies Oy, o kai $a<0$ – į kairę nuo jos. ▲

6 uždavinys. Reikia užrašyti ašies Oy lygtį.

△ Ašis Oy yra aibė visų plokštumos taškų, kurių abscisės lygios nuliui. Algebriškai tai užrašoma lygtimi

$$x=0. \ ▲$$

§ 30. TIESĖS PARAMETRINĖS LYGTYS

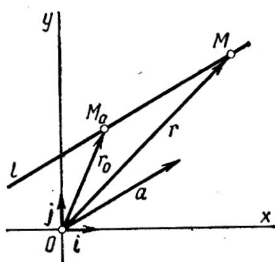
Sakykime, stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje yra nurodytas tiesės l pradžios taškas M_0 ir jos krypties vektorius **a** (85 pav.). Be to, sakykime, M yra bet kuris tiesės taškas, o **r** – spindulys vektorius. Vektorius $\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ (jo pradžios taškas M_0 yra tiesėje) lygiagretus tiesei tada ir tik tada, kai jo galo taškas M taip pat yra toje tiesėje. Tuo atveju vektorius $\overrightarrow{M_0M}$ yra kolinearus vektoriui **a**.

Todėl

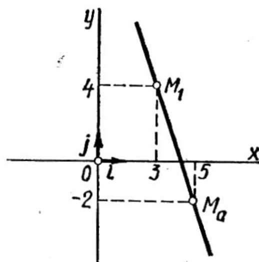
$$\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{a} \text{ arba } \mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t\mathbf{a}. \qquad (1)$$

Atvirkščiai, paėmus bet kokią t reikšmę (1) formulėje, vektorius **r** bus tam tikro tiesės l taško spindulys vektorius.

Kintamasis t, įgyjantis skirtingas skaitines reikšmes, vadinamas *parametru*, o (1) lygtis – tiesės l *vektorine parametrine lygtimi.*



85 pav.



86 pav.

Jeigu taškų M ir M_0 koordinates pažymėsime atitinkamai $(x; y)$ ir $(x_0; y_0)$, o vektoriaus **a** koordinates – $(a_1; a_2)$, tai (1) lygtį galėsime užrašyti šitaip:

$$\begin{aligned} x&=x_0+a_1 t,\\ y&=y_0+a_2 t. \end{aligned} \qquad (2)$$

Tos lygtys ir vadinamos tiesės parametrinėmis lygtimis.

1 uždavinys. Reikia rasti tiesės, einančios per tašką $M_0(3; -5)$ lygiagrečiai vektoriui $\mathbf{a}=(4; 1)$, parametrines lygtis.

△ Taško M_0 ir vektoriaus **a** koordinates įrašę į (2) lygtis, gauname

$$\begin{cases} x=3+4t, \\ y=-5+t. \end{cases}$$ ▲

2 uždavinys. Tiesė l aprašyta lygtimis $x=5-2t$, $y=-2+6t$. Reikia nubrėžti tą tiesę.

△ Tiesei nubrėžti reikia dviejų taškų. Tos tiesės pradinio taško koordinatės randamos iš jos lygčių: $M_0(5; -2)$. Norėdami rasti bet kurio kito tiesės taško koordinates, imame kokią nors parametro t reikšmę ir įrašome ją į tiesės lygtis. Sakykime, $t=1$, tada $M_1(3; 4)$. Rastuosius taškus pažymime koordinačių plokštumoje ir (naudodamiesi liniuote) brėžiame ieškomąją tiesę (86 pav.). ▲

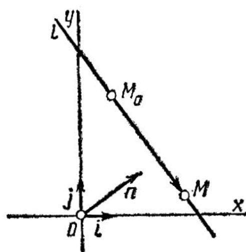
§ 31. LYGTIS TIESĖS, EINANČIOS PER DUOTĄJĮ TAŠKĄ STATMENAI DUOTAJAM VEKTORIUI

Sakykime, duotas tam tikras taškas M_0 ir vektorius **n**. Per tašką M_0 išvedame tiesę l statmenai vektoriui **n** (87 pav.). Tarkime, kad M – bet kuris tiesės l taškas. Taškas M yra tiesėje l tada ir tik tada, kai vektorius $\overrightarrow{M_0M}$ yra statmenas vektoriui **n**, o tam būtina ir pakankama, kad skaliarinė vektorių **n** ir $\overrightarrow{M_0M}$ sandauga būtų lygi nuliui:

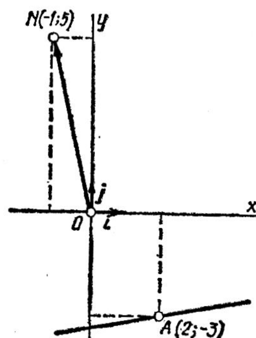
$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (1)$$

Kad gautume pastarosios lygybės koordinatinę išraišką, įvesime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą. Sakykime, taškų M_0 ir M koordinatės yra $(x_0; y_0)$ ir $(x; y)$. Tuomet vektoriaus $\overrightarrow{M_0M}$ koordinatės $(x-x_0; y-y_0)$. Normalės vektoriaus koordinates pažymėkime $(A; B)$. Dabar (1) lygybę galime užrašyti šitaip:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (2)$$



87 pav.



88 pav.

(2) išraiška ir yra lygtis tiesės l, einančios per duotąjį tašką M_0 statmenai duotajam vektoriui $\mathbf{n}$.

1 uždavinys. Reikia užrašyti lygtį tiesės, einančios per tašką A (2; −3) statmenai vektoriui $\mathbf{n}=(-1; 5)$ (88 pav.).

△ Naudodamiesi (2) formule, užrašome tos tiesės lygtį:

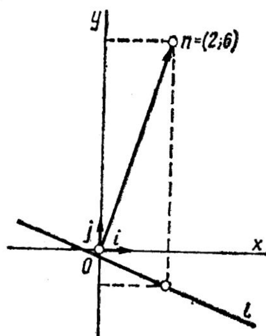
$$-1(x-2)+5(y+3)=0 \text{ arba } x-5y-17=0. \ ▲$$

2 uždavinys. Duoti taškai M_1 (2; −1) ir M_2 (4; 5). Reikia užrašyti lygtį tiesės, einančios per tašką M_1 statmenai vektoriui $\overrightarrow{M_1M_2}$.

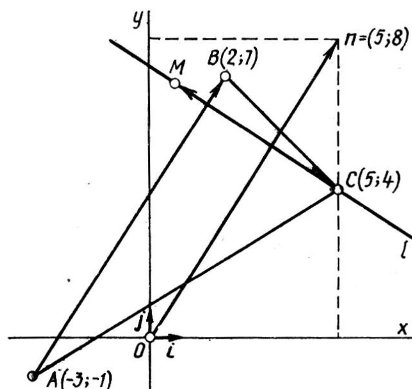
△ Tiesės normalės vektoriaus $\mathbf{n}=\overrightarrow{M_1M_2}$ koordinatės yra (2; 6) (89 pav.). Jas įrašę į (2) lygtį, gauname

$$2(x-2)+6(y+1)=0 \text{ arba } x+3y+1=0. \ ▲$$

3 uždavinys. Trikampyje, kurio viršūnės yra taškai M_1 (−5; 2), M_2 (5; 6) ir M_3 (1; −2), išvesta pusiaukraštinė M_1A_1. Reikia sudaryti lygtį tiesės, einančios per tašką A_1 statmenai pusiaukraštinei M_1A_1.



89 pav.



90 pav.

△ Ieškomosios tiesės normalės vektoriumi galime laikyti vektorių $\mathbf{n}=\overrightarrow{M_1A_1}$. Rasime jo koordinates. Kadangi A_1 yra atkarpos M_2M_3 vidurio taškas, tai $x_1=\frac{5+1}{2}=3$, o $y_1=\frac{6-2}{2}=2$. Tada normalės vektoriaus koordinatės bus (8; 0), t. y. $A=8$, $B=0$. Ieškomosios tiesės vektoriaus $\overrightarrow{A_1M}$ koordinatės yra $(x-3;\ y-2)$. Remiantis (2), ieškomosios tiesės lygtį galima užrašyti šitaip:

$$8(x-3)+0(y-2)=0 \text{ arba } x=3. \ ▲$$

4 uždavinys. Duotas trikampis, kurio viršūnės yra A (−3; −1), B (2; 7) ir C (5; 4). Reikia sudaryti lygtį tiesės, einančios per viršūnę C ir statmenos kraštinei AB.

△ Ieškomosios tiesės normalės vektoriumi galime laikyti vektorių $\mathbf{n}=\overrightarrow{AB}$. Jo koordinatės bus $\mathbf{n}=(2-(-3); 7-(-1))=(5; 8)$. Sakykime, M yra bet kuris duotosios tiesės taškas, tada $\overrightarrow{CM}=(x-5; y-4)$. Iš uždavinio sąlygų $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{AB}$. Vadinasi, $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ arba $5(x-5)+8(y-4)=0$ ir galutinai $5x+8y-57=0$ (90 pav.). ▲

§ 32. TIESĖS BENDROJI LYGTIS

Praeituose paragrafuose įrodėme, kad kiekviena tiesė stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje aprašoma pirmojo laipsnio algebrine lygtimi. Dabar įrodysime, kad ir kiekviena pirmojo laipsnio lygtis

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje aprašo vienintelę tiesę.

□ Iš tikrųjų, (1) lygybėje bent vienas iš koeficientų A arba B nėra lygus nuliui, nes priešingu atveju (1) lygybė nebus lygtis. Sakykime, $B\neq 0$. Tada (1) lygtį galima užrašyti šitaip:

$$A(x-0)+B\left(y-\left(-\frac{C}{B}\right)\right)=0. \qquad (2)$$

Remiantis praeito paragrafo samprotavimais, (2), vadinasi, ir (1) lygtis aprašo tiesę, einančią per tašką $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ statmenai vektoriui $\mathbf{n}=(A; B)$, ir ta tiesė yra vienintelė. ■

Lygtis $Ax+By+C=0$ vadinama *tiesės bendrąja lygtimi.*

Atkreipsime dėmesį, kad lygtyje $Ax+By+C=0$ kintamojo x koeficientas A yra tiesės normalės vektoriaus pirmoji koordinatė, kintamojo y koeficientas B – antroji koordinatė. Pavyzdžiui, lygtimi $3x-4y+5=0$ aprašytos tiesės normalės vektorius yra $\mathbf{n}=(3; -4)$, lygtimi $y=\frac{2}{5}x+17$ – vektorius $\mathbf{n}=\left(\frac{2}{5}; -1\right)$, o lygtimi $x=5$ aprašytos tiesės normalės vektorius $\mathbf{n}=(1; 0)$.

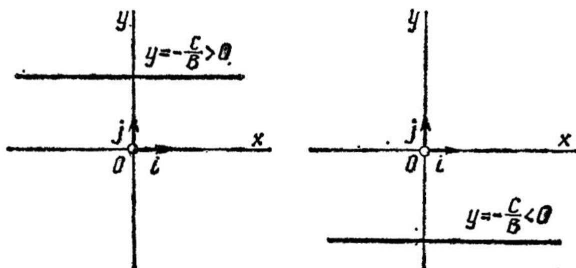
§ 33. TIESĖS BENDROSIOS LYGTIES TYRIMAS

Praeituose paragrafuose įrodėme, kad kiekviena tiesė stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje aprašoma pirmojo laipsnio algebrine lygtimi ir atvirkščiai, kiekviena pirmojo laipsnio lygtis

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

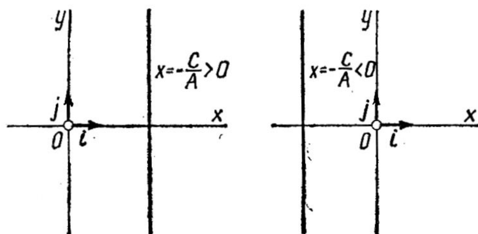
(kurioje koeficientai A ir B kartu nelygūs nuliui) stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje aprašo tiesę. Panagrinėkime, kaip keičiasi tiesės padėtis koordinačių sistemos atžvilgiu, kintant A, B ir C reikšmėms.

1. Jeigu tiesės bendrojoje lygtyje koeficientas $A=0$, tai ją galima užrašyti šitaip: $By+C=0$ arba $y=-\frac{C}{B}$. Tai reiškia, kad visi tos tiesės taškai turi tą pačią ordinatę $\left(-\frac{C}{B}\right)$. Vadinasi, tiesė yra lygiagreti ašiai Ox (91 pav.).



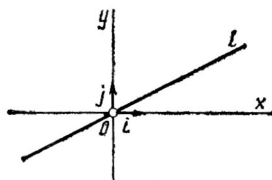
91 pav.

2. Jeigu (1) lygtyje $B=0$, tai ją galima užrašyti $Ax+C=0$ arba $x=-\frac{C}{A}$. Tai reiškia, kad visi tiesės taškai turi tą pačią abscisę $\left(-\frac{C}{A}\right)$. Vadinasi, tiesė yra lygiagreti ašiai Oy (92 pav.).

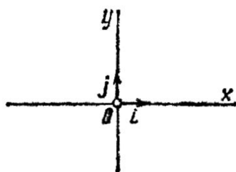


92 pav.

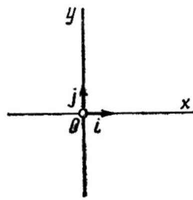
3. Jeigu $C=0$, tai (1) tiesės lygtis virsta šitokia: $Ax+By=0$. Ją tenkina taško O (0; 0) koordinatės. Vadinasi, ta lygtimi aprašyta tiesė eina per koordinačių pradžią (93 pav.).



93 pav.



94 pav.



95 pav.

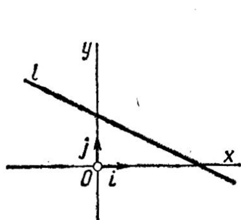
4. Jeigu $A=0$ ir $C=0$, tai (1) lygtis virsta lygtimi $By=0$ arba $y=0$. Kadangi $A=0$, tai tiesė yra lygiagreti ašiai Ox, o kadangi $C=0$, tai tiesė eina per koordinačių pradžią. Vadinasi, ji sutampa su ašimi Ox (94 pav.).

5. Jeigu $B=0$ ir $C=0$, tai (1) lygtį galima užrašyti šitaip: $Ax=0$ arba $x=0$. Kadangi $B=0$, tai tiesė yra lygiagreti ašiai Oy, o kadangi $C=0$, tai tiesė eina per koordinačių pradžią. Vadinasi, ji sutampa su ašimi Oy (95 pav.).

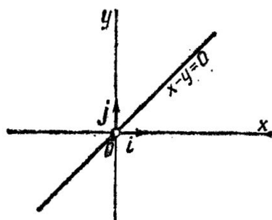
6. Jeigu $A\neq 0$, $B\neq 0$ ir $C\neq 0$, tai tiesė nėra lygiagreti ašiai Ox, nėra lygiagreti ašiai Oy ir neina per koordinačių pradžią (96 pav.).

Uždavinys. Reikia išsiaiškinti duotųjų tiesių padėtį koordinačių sistemos atžvilgiu ir nubrėžti jas: 1) $x-y=0$; 2) $x+y=0$; 3) $3x-12=0$; 4) $5y+20=0$; 5) $3x+4y=0$.

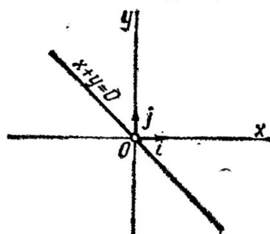
△ 1) Kadangi tiesės lygtyje nėra laisvojo nario, tai tiesė eina per koordinačių pradžią. Be to, bet kurio tiesės taško abscisė yra lygi ordinatei, taigi tiesė yra pirmojo ir trečiojo ketvirčio pusiaukampinė (97 pav.).



96 pav.



97 pav.

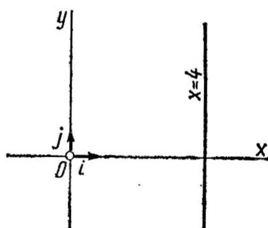


98 pav.

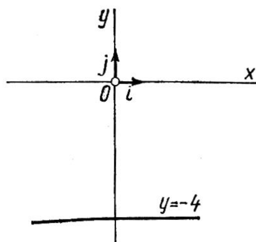
2) Tiesės lygtyje nėra laisvojo nario, taigi ji eina per koordinačių pradžią. Kadangi kiekvieno jos taško abscisės ir ordinatės absoliutiniai didumai yra lygūs, bet priešingų ženklų, tai ta tiesė yra antrojo ir ketvirtojo ketvirčio pusiaukampinė (98 pav.).

3) Šios tiesės lygtį galime užrašyti paprasčiau: $x=4$. Aibė taškų, kurių abscisės yra vienodos, o ordinatės skirtingos, yra tiesė, lygiagreti ordinačių ašiai ir esanti į dešinę nuo jos per keturis vienetus (99 pav.).

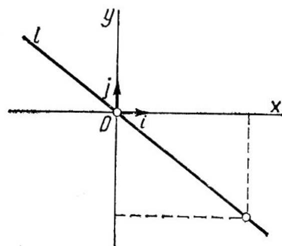
4) Šios tiesės lygtį galime užrašyti šitaip: $y=-4$. Aibė taškų, kurių ordinatės vienodos, o abscisės skirtingos, sudaro tiesę, lygiagrečią abscisių ašiai ir esančią žemiau jos per keturis vienetus (100 pav.).



99 pav.



100 pav.



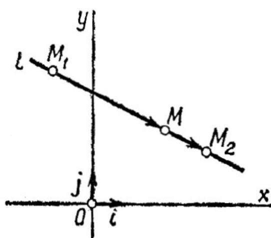
101 pav.

5) Kadangi lygtyje nėra laisvojo nario, tai tiesė eina per koordinačių pradžią. Norint nubrėžti tiesę, reikia rasti dar vieno taško koordinates. Sakykime, $x=4$. Tą x reikšmę įrašę į lygtį, randame $y=-3$. Išvedame tiesę per koordinačių pradžią O (0; 0) ir tašką (4; -3) (101 pav.). ▲

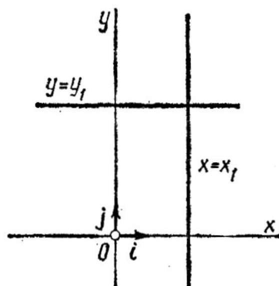
§ 34. TIESĖS, EINANČIOS PER DU TAŠKUS, LYGTIS

Sakykime, turime du taškus M_1 ir M_2. Išveskime per juos tiesę l. Tiesė M_1M_2 yra vienintelė (remiantis aksioma). Imkime bet kurį tos tiesės tašką M. Kadangi taškai M, M_1 ir M_2 yra tiesėje l, tai vektoriai $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir $\overrightarrow{M_1M}$ yra kolinearūs (102 pav.). Vadinasi,

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\overrightarrow{M_1M_2}. \quad (1)$$



102 pav.



103 pav.

(1) lygybę užrašysime koordinatėmis. Prieš tai įvesime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą. Sakykime, taškų M, M_1 ir M_2 koordinatės yra $(x;\ y)$, $(x_1;\ y_1)$ ir $(x_2;\ y_2)$. Tada vektorių $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ koordinatės yra $(x-x_1;\ y-y_1)$ ir $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$. Dabar (1) lygybę galime užrašyti šitaip:

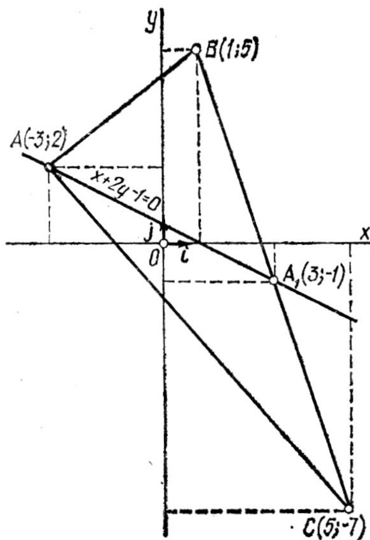
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (2)$$

(Jeigu vektoriai kolinearūs, tai jų koordinatės proporcingos.)

Tai ir yra tiesės, einančios per du taškus, lygtis.

(2) lygtis netenka prasmės, kai bent vienas vardiklis yra lygus nuliui. Jeigu $x_2-x_1=0$, tai $l\,||\,(Oy)$; tuo atveju tiesės lygtis yra $x=x_1$. Jeigu $y_2-y_1=0$, tai $l\,||\,(Ox)$, ir tiesės lygtis yra $y=y_1$ (103 pav.).

1 uždavinys. Reikia sudaryti lygtį tiesės, einančios per du taškus $M_1\,(3;\ -2)$ ir $M_2\,(5;\ 1)$.



104 pav.

△ Taškų M_1 ir M_2 koordinates įrašę į (2) lygtį, gauname

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y+2}{1+2} \text{ arba } 3x-2y-13=0. \ ▲$$

2 uždavinys. Duotas trikampis ABC, kurio viršūnės yra taškai $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$ ir $C(5; -7)$. Reikia rasti iš viršūnės A nubrėžtos pusiaukraštinės lygtį.

△ Jeigu A_1 yra atkarpos BC vidurio taškas, tai jo koordinatės $(3; -1)$. Taškų A ir A_1 koordinates įrašę į (2) lygtį, gauname

$$\frac{x+3}{3+3}=\frac{y-2}{-1-2} \text{ arba } x+2y-1=0 \text{ (104 pav.)}. \ ▲$$

§ 35. TIESĖS AŠINĖ LYGTIS

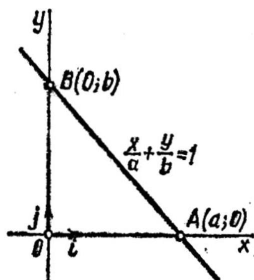
Tarkime, kad duoti du koordinačių ašių taškai $A(a; 0)$ ir $B(0; b)$. Rasime per tuos taškus nubrėžtos tiesės lygtį (105 pav.). Remdamiesi 34 paragrafo (2) formule, gauname

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}.$$

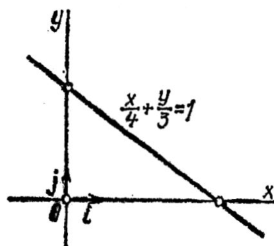
Pertvarkę pastarąją lygybę, gauname per taškus $A(a; 0)$ ir $B(0; b)$ einančios tiesės lygtį

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Tą lygtį vadiname *tiesės ašine lygtimi*, nes skaičiai a ir b rodo, kokias atkarpas tiesė atkerta koordinačių ašyse.



105 pav.



106 pav.

Turėdami ašinę tiesės lygtį, lengvai galime nubrėžti tiesę. Pavyzdžiui, nubrėškime tiesę $3x+4y-12=0$. Tuo tikslu laisvąjį narį perkeliame į dešinę pusę ir iš jo padalijame abi lygties puses. Gauname duotosios tiesės ašinę lygtį

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1.$$

Dabar koordinačių ašyse atidedame taškus $A(4; 0)$, $B(0; 3)$ ir per juos brėžiame ieškomąją tiesę (106 pav.). Atkreipsime dėmesį, kad tiesės ašinė lygtis neturi prasmės, jeigu tiesė eina per koordinačių pradžią.

1 uždavinys. Reikia parašyti lygtį tiesės, einančios per tašką $A(4; -3)$ ir su koordinačių ašimis sudarančios trijų kvadratinių vienetų ploto trikampį.

$\triangle$ Uždavinį sprendžiame naudodamiesi tiesės ašine lygtimi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Iš uždavinio sąlygos $S_\Delta=3$ kv. vnt. Tą patį stataus trikampio plotą išreiškiame naudodamiesi koordinačių ašyse tiesės atkirstų atkarpų ilgiais; $S_\Delta=ab/2$.

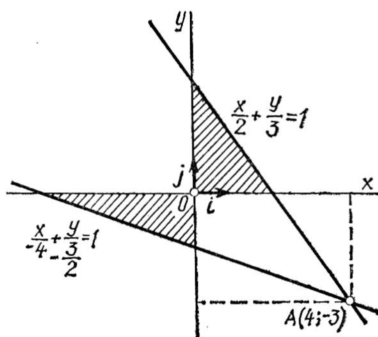
Vadinasi, $ab=\pm 6$ (nes atkarpos a ir b gali būti skirtingų ženklų).

Ieškomoji tiesė eina per tašką A $(4; -3)$. Vadinasi, jo koordinatės tenkina tiesės lygtį ir galime užrašyti $\frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1$, t. y. dar vieną a ir b sąryšį.

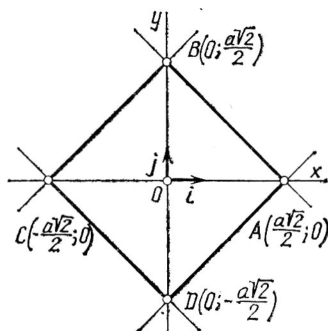
Turime dvi sistemas dydžiams a ir b rasti:

$$\begin{cases} ab=6, \\ \frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} ab=-6, \\ \frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1. \end{cases}$$

Iš pirmosios sistemos gauname $a_1=2$, $b_1=3$ ir $a_2=-4$, $b_2=-\frac{3}{2}$; antroji sistema sprendinių neturi.



107 pav.



108 pav.

Vadinasi, ieškomųjų tiesių lygtys yra

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \text{ ir } \frac{x}{-4}+\frac{y}{-3/2}=1 \quad (107 \text{ pav.}). \blacktriangle$$

2 uždavinys. Reikia užrašyti kvadrato kraštinių lygtis, kai kraštinės ilgis lygus a, o kvadrato įstrižainės laikomos stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos ašimis.

$\triangle$Sakykime, $ABCD$ yra duotasis kvadratas, O – įstrižainių susikirtimo taškas (jis sutampa su koordinačių pradžia) (108 pav.).

Nesunkiai gauname

$$|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Dabar užrašome kvadrato kraštinių ašines lygtis:

$$(AB)\quad \frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=1,\ \text{arba}\ x+y-\frac{a\sqrt{2}}{2}=0;$$

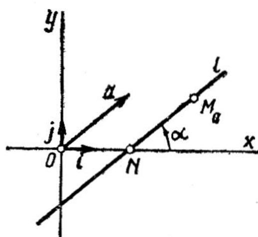
$$(BC)\quad \frac{x}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=1,\ \text{arba}\ x-y+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0;$$

$$(CD)\quad \frac{x}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=1,\ \text{arba}\ x+y+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0;$$

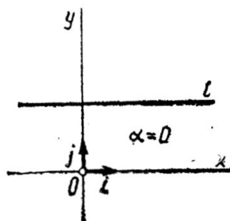
$$(AD)\quad \frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=1,\ \text{arba}\ x-y-\frac{a\sqrt{2}}{2}=0.$$ ▲

§ 36. TIESĖS KRYPTIES KOEFICIENTAS. LYGTIS TIESĖS, EINANČIOS PER DUOTĄJĮ TAŠKĄ DUOTĄJA KRYPTIMI

Sakykime, plokštumoje, kurioje įvesta stačiakampė Dekarto koordinačių sistema, yra duota tiesė l, einanti per tašką M_0 lygiagrečiai krypties vektoriui **a** (109 pav.). Jeigu tiesė l kerta ašį Ox taške N, tai kampu tarp tiesės l ir ašies Ox laikysime kampą α, kuriuo reikia pasukti ašį Ox apie tašką N prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį, kad ašis Ox sutaptų su tiese l.



109 pav.



110 pav.

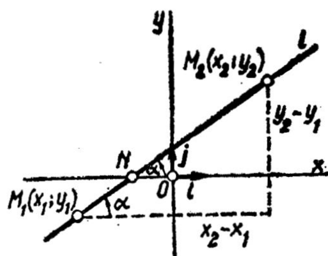
(Turime galvoje kampą, mažesnį kaip 180°.) Jeigu tiesė l yra lygiagreti ašiai Ox, tai kampą, sudaromą tiesės l su ašimi Ox, laikome lygiu nuliui (110 pav.).

Taško posvyrio į ašį Ox kampo tangentą vadiname *tiesės krypties koeficientu* ir žymime raide k:

$$\operatorname{tg}\alpha=k. \tag{1}$$

Jeigu $\alpha=0$, tai ir $k=0$. Tai reiškia, kad tiesė l yra lygiagreti ašiai Ox, jos krypties koeficientas lygus nuliui.

Jeigu $\alpha=90°$, tai $k=\operatorname{tg}\alpha$ neturi prasmės (t. y. neišreiškiamas jokiu skaičiumi); tai reiškia, kad ašiai Ox statmena tiesė neturi krypties koeficiento. Kitaip tariant, tiesė, lygiagreti ašiai Oy, krypties koeficiento neturi.



111 pav.

Tiesės krypties koeficientą galima rasti žinant kurių nors dviejų tos tiesės taškų koordinates (111 pav.). Tarkime, kad duoti du tiesės taškai $M_1(x_1;\ y_1)$ ir $M_2(x_2;\ y_2)$. Tada

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{2}$$

(2) formulė netenka prasmės, kai $x_2-x_1=0$, t. y. kai tiesė l yra statmena ašiai Ox (arba, tai yra tas pats, lygiagreti ašiai Oy).

1 uždavinys. Reikia rasti tiesės M_1M_2 krypties koeficientą k, kai $M_1(3;\ -5)$ ir $M_2(5;\ -7)$.

△ Taškų M_1 ir M_2 koordinates įrašę į (2) formulę, gauname

$$k=\frac{-7-(-5)}{5-3} \quad \text{arba } k=-1. \ ▲$$

2 uždavinys. Reikia rasti tiesės M_1M_2 krypties koeficientą, kai $M_1(3;\ 5)$ ir $M_2(3;\ -2)$.

△ Kadangi $x_2-x_1=0$ $(3-3=0)$, tai (2) lygybė neturi prasmės. Ši tiesė krypties koeficiento neturi. Tiesė M_1M_2 yra statmena ašiai Ox. ▲

3 uždavinys. Reikia apskaičiuoti tiesės, einančios per koordinačių pradžią ir tašką $M_1(3;\ -5)$, krypties koeficientą.

△ Šiuo atveju tašku M_2 laikysime koordinačių pradžią. Pritaikę (2) formulę, gauname

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-5)}{0-3}=-\frac{5}{3};\quad k=-\frac{5}{3}. \ ▲$$

Sudarysime lygtį tiesės, einančios per tašką $M_1(x_1;\ y_1)$, kai krypties koeficientas k duotas.

(2) formulė yra krypties koeficiento išraiška, kai žinomos dviejų jos taškų koordinatės. Taigi taškas M_1 yra duotas, o antruoju tašku galime imti bet kurį tiesės tašką $M(x;\ y)$.

Jeigu taškas M yra tiesėje, kuri eina per tašką M_1 ir turi krypties koeficientą k, tai, remiantis (2) formule,

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k. \tag{3}$$

Jeigu taškas M tiesei nepriklauso, tai (3) lygybė nėra teisinga. Vadinasi, (3) lygybė ir yra lygtis tiesės, kuri eina per tašką $M_1(x_1;\ y_1)$ ir kurios krypties koeficientas yra k. Tokios tiesės lygtis paprastai užrašoma šitaip:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{4}$$

Tą lygtį galima užrašyti ir kitaip. (4) lygybe aprašyta tiesė nėra lygiagreti ašiai Oy. Vadinasi, ji kerta ašį Oy tam tikrame taške B; jo koordinates pažymėkime $(0; b)$. Taškas B priklauso (4) tiesei, todėl jo koordinatėmis galima pakeisti taško M_1 koordinates, ir tada (4) lygtis virs šitokia:

$$y = kx + b. \qquad (5)$$

Dabar galime tvirtinti štai ką: kiekviena tiesė, nelygiagreti ašiai Oy, gali būti aprašyta (5) pavidalo lygtimi.

Atvirkščiai, kiekviena (5) pavidalo lygtis aprašo tiesę, kurios krypties koeficientas k ir kuri ašyje Oy atkerta $|b|$ ilgio atkarpą. Iš tikrųjų, jeigu turime lygtį $y = kx + b$, tai, kad ir kokios būtų k ir b reikšmės, visada galėsime nubrėžti tiesę, kuri ašyje Oy atkirs duotojo ilgio b atkarpą OB ir turės duotąjį krypties koeficientą k.

Lygtis $y = kx + b$ vadinama *tiesės kryptine lygtimi*.

1 uždavinys. Sudarykite lygtį tiesės, kuri eina per tašką $P(3; -4)$ ir kurios krypties koeficientas $k = \frac{2}{5}$.

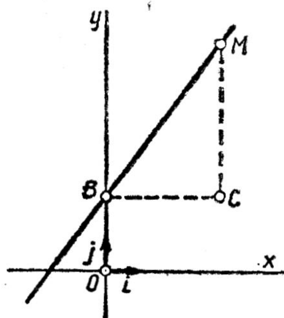
△ Uždavinio duomenis įrašę į (4) lygtį, gauname $y - (-4) = \frac{2}{5}(x - 3)$ arba $2x - 5y - 26 = 0$. ▲

2 uždavinys. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką $Q(-3; 4)$ ir sudarančios su teigiamąja ašies Ox kryptimi $30°$ kampą.

△ Jeigu $\alpha = 30°$, tai $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Į (4) lygtį įrašę x_1, y_1 ir k reikšmes, gauname

$$y - 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 3) \text{ arba}$$

$$\sqrt{3} \cdot x - 3y + 12 + 3\sqrt{3} = 0. \; ▲$$



112 pav.

3 uždavinys. Reikia nubrėžti tiesę, kai duota jos lygtis $y = \frac{4}{3}x + 2$.

△ Ašyje Oy atidedame atkarpą OB, $|OB| = 2$ (112 pav.); per tašką B į „dešinę“ lygiagrečiai ašiai Ox brėžiame atkarpą BC, $|BC| = 3$, ir per tašką C ašies Oy kryptimi („į viršų“) – atkarpą CM, $|CM| = 4$. Per taškus B ir M brėžiame ieškomąją tiesę. (Ši tiesė ašyje Oy atkerta dviejų vienetų ilgio atkarpą ir su ašimi Ox sudaro kampą, kurio tangentas lygus $\frac{4}{3}$.) ▲

§ 37. KAMPO TARP TIESIŲ RADIMAS

Vienas iš svarbių analizinės geometrijos uždavinių – rasti dviejų tiesių sudaromą kampą.

Sakykime, turime dvi susikertančias tieses l_1 ir l_2. Jų spinduliai, išeinantys iš susikirtimo taško S, sudaro dvi kampų poras (113 pav.): $\angle 1$, $\angle 3$ ir

$\angle 2$, $\angle 4$. Radę bent vieną iš jų, lengvai rasime ir kitus. Aišku, vienu iš tų kampų galima laikyti kampą tarp tų tiesių krypties arba normalės vektorių (114 pav.).

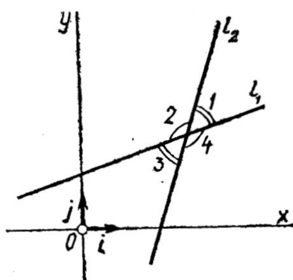
Jeigu tiesės l_1 ir l_2 aprašytos bendrosiomis lygtimis, tai paprasčiausia skaičiuoti kampą tarp tų tiesių normalių vektorių.

Jeigu tiesės l_1 ir l_2 yra aprašytos kryptinėmis lygtimis, tai kampą tarp jų paprasčiausia išreikšti kampų, sudaromų su ašimi Ox, tangentais. Išnagrinėsime abu atvejus.

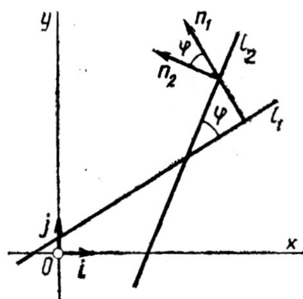
1. Sakykime, plokštumoje parinkta stačiakampė Dekarto koordinačių sistema ir duotos dviejų skirtingų tiesių l_1 ir l_2 bendrosios lygtys:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \qquad (1)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \qquad (2)$$



113 pav.



114 pav.

Iš (1) lygties nesunku pastebėti, kad tiesės l_1 normalės vektoriaus $\mathbf{n}_1$ koordinatės yra $(A_1; B_1)$, iš (2) lygties, – kad tiesės l_2 normalės vektoriaus $\mathbf{n}_2$ koordinatės yra $(A_2; B_2)$. Vienas iš tiesių l_1 ir l_2 sudaromų kampų yra lygus kuriam nors kampui tarp tų tiesių normalių vektorių (115 pav.):

$$(\widehat{l_1; l_2}) = (\widehat{\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2}).$$

Remiantis 19 paragrafu, kampo tarp dviejų vektorių kosinusas yra lygus tų vektorių skaliarinei sandaugai, padalytai iš jų ilgių sandaugos, t. y.

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

Vadinasi,

$$\cos(\widehat{l_1; l_2}) = \cos(\widehat{\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2}) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3)$$

Pavyzdžiui, duotos dvi tiesės $3x + 4y - 25 = 0$ ir $4x + 3y - 25 = 0$. Rasime kampą tarp jų. Remdamiesi (3) formule, gauname

$$\cos(\widehat{l_1; l_2}) = \cos(\widehat{\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2}) = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{25}.$$

2. Sakykime, plokštumoje duota stačiakampė Dekarto koordinačių sistema, o tiesės l_1 ir l_2 aprašytos lygtimis

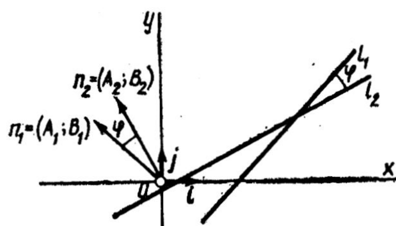
$$y=k_1x+b_1, \tag{4}$$

$$y=k_2x+b_2. \tag{5}$$

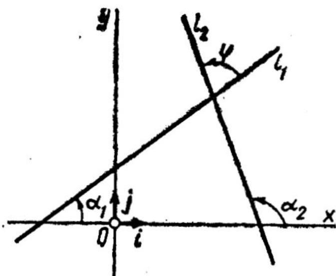
(4) ir (5) tiesės nėra lygiagrečios ašiai Oy, nes ašiai Oy lygiagrečių tiesių krypties koeficiento negalima rasti (§ 36).

Kampu tarp (4) ir (5) tiesių, nagrinėjamų nurodyta eile, vadiname kampą φ, kuriuo reikia pasukti (4) tiesę l_1 kryptimi, priešinga laikrodžio rodyklės judėjimo krypčiai, kol ji pirmą kartą sutaps su (5) tiese l_2.

Jeigu tiesės l_1 ir l_2 yra lygiagrečios, tai kampą tarp jų laikome lygiu nuliui. Vadinasi, $0 \leqslant \varphi < 180°$.



115 pav.



116 pav.

Sakykime, α_1 yra (4) tiesės l_1 posvyrio į ašį Ox kampas, α_2 – (5) tiesės posvyrio į ašį Ox kampas ir φ – antrosios tiesės posvyrio į pirmąją kampas (116 pav.). Tada $\alpha_1+\varphi=\alpha_2$ arba $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$. Vadinasi,

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}. \tag{6}$$

Kadangi $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$, o $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$, tai (6) lygybę galima užrašyti šitaip:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{7}$$

Tai ir yra formulė kampui tarp dviejų tiesių skaičiuoti.

(7) išraiška netenka prasmės, jeigu vardiklis lygus nuliui, t. y. kai (4) ir (5) tiesės yra statmenos.

Uždavinys. Duotos dvi tiesės: $x+7y-5=0$ ir $3x-4y+20=0$. Reikia rasti kampą tarp jų.

△ Pirmosios tiesės krypties koeficientas $k_1=-\frac{1}{7}$, o antrosios tiesės krypties koeficientas $k_2=\frac{3}{4}$. Iš (7) formulės

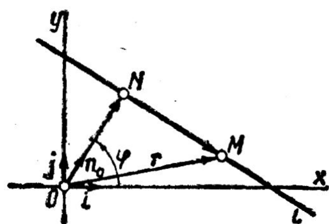
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{7}\right)}{1+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)}=\frac{25\cdot 28}{28\cdot 25}=1.$$

Vadinasi, kampas tarp tiesių lygus 45°. ▲

§ 38. TIESĖS NORMALINĖ LYGTIS

Sudarysime lygtį tiesės l, apibrėžtos stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje, kai žinomas vienetinis normalės vektorius $\mathbf{n}_0=(\cos\varphi;\ \sin\varphi)$ ir tos tiesės atstumas p nuo koordinačių pradžios (117 pav.).

□ Iš taško O nubrėšime statmenį tiesei l, jų susikirtimo tašką pažymėsime N. Akivaizdu, kad $\overrightarrow{ON}$ yra to taško spindulys vektorius. Remiantis sąlyga, $\overrightarrow{ON}=p\mathbf{n}_0$. Sakykime, $\mathbf{r}$ yra bet kurio (kintamo) tiesės taško M spindulys vektorius. Tam, kad taškas M būtų tiesėje l, būtina ir pakankama, kad vektoriai $\overrightarrow{NM}$ ir $\mathbf{n}_0$ būtų statmeni, t. y. $\overrightarrow{NM}\times\mathbf{n}_0=0$. Tačiau $\overrightarrow{NM}=\mathbf{r}-\overrightarrow{ON}=\mathbf{r}-p\mathbf{n}_0$, todėl $(\mathbf{r}-p\mathbf{n}_0)\cdot\mathbf{n}_0=0$ arba $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_0-p=0$.



117 pav.

Jeigu $(x;\ y)$ yra taško M koordinatės, tai $\mathbf{r}=(x;\ y)$, ir pastarąjį sąryšį galima užrašyti šitaip:

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0.$$

Tą lygtį vadiname tiesės l *normaline lygtimi*. ■

Ši tiesės lygties forma patogesnė už kitas, nes visi koeficientai turi geometrinę prasmę. Koeficientai prie kintamųjų x ir y ($\cos\varphi$ ir $\sin\varphi$) nustato kampą tarp vienetinio normalės vektoriaus ir ašies Ox, o laisvasis narys p yra tiesės atstumas nuo koordinačių pradžios, paimtas su minuso ženklu.

Nesunku pastebėti štai ką: kad tiesės lygtis būtų normalinė, būtina, jog koeficientų prie kintamųjų x ir y kvadratų suma būtų lygi vienetui (nes $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$). Pavyzdžiui, iš tiesės lygties $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-6=0$ išplaukia, jog ši tiesė nuo koordinačių pradžios yra nutolusi šešių mastelio vienetų atstumu, o tiesės normalės vektorius $\mathbf{n}_0$ su teigiama ašies Ox kryptimi sudaro kampą, kurio kosinusas lygus $\frac{3}{5}$, o sinusas lygus $\frac{4}{5}$.

Iš bendrosios tiesės lygties $Ax+By+C=0$ galime gauti normalinę, jos kairiąją pusę padauginę iš

$$\frac{\pm 1}{|\mathbf{n}|}=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Skaičių $\lambda=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ vadiname *normuojančiuoju daugikliu*; λ ir C yra priešingų ženklų. Dabar tiesės lygtis bus šitokia:

$$\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Tai yra tiesės normalinė lygtis, nes

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=\frac{A^2}{A^2+B^2}+\frac{B^2}{A^2+B^2}=1.$$

Sakykime, duota tiesės lygtis $3x+4y-15=0$. Dešiniąją pusę padauginę iš $\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$, gauname $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-3=0$. Dabar turime $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$. Vadinasi, tiesės $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-3=0$ normalės vektorius yra vienetinis.

§ 39. ATSTUMAS TARP TAŠKO IR TIESĖS

Sakykime, duota tiesės l normalinė lygtis ir taškas $M_1(x_1; y_1)$. Reikia rasti taško atstumą iki tiesės.

Atstumu tarp taško ir tiesės l laikysime atkarpos M_0M_1 ilgį; čia $M_0(x_0; y_0)$ – statmens, nubrėžto iš taško M_1 į tiesę l, ir tiesės l susikirtimo taškas.

Vektoriai $\mathbf{n}_0=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ ir $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0; y_1-y_0)$ yra kolinearūs, nes $\mathbf{n}_0\perp l$ (kaip normalės vektorius) ir $M_0M_1\perp l$ (taip buvo brėžta). Todėl $|\overrightarrow{M_0M_1}|=|d\mathbf{n}_0|$.

Akivaizdu, kad

$$|\mathbf{n}_0\cdot\overrightarrow{M_0M_1}|=|\mathbf{n}_0||\overrightarrow{M_0M_1}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|.$$

Pastarąją lygybę išreiškiame koordinatėmis:

$$|\mathbf{n}_0\cdot\overrightarrow{M_0M_1}|=\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}(x_1-x_0)+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}(y_1-y_0)\right|=$$

$$=\frac{|Ax_1+By_1-(Ax_0+By_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Kadangi $M_0\in l$, tai $Ax_0+By_0+C=0$ arba $C=-(Ax_0+By_0)$.

Vadinasi,

$$d=|\overrightarrow{M_0M_1}|=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

1 uždavinys. Reikia rasti taško $M(3; 2)$ atstumą iki tiesės $4x-3y+14=0$.

△ $d=\frac{4\cdot3-3\cdot2+14}{5}=4$. ▲

2 uždavinys. Reikia rasti taško $N(5; 4)$ atstumą iki tiesės

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

△ Randame tiesės lygties normalinę išraišką:

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}}=\frac{12}{5},$$

$$\frac{x}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{y}{4}\cdot\frac{12}{5}-\frac{12}{5}=0,\quad \frac{4x+3y-12}{5}=0,\quad d=\frac{4\cdot5+3\cdot4-12}{5}=4.\ ▲$$

§ 40. DVIEJŲ TIESIŲ SUSIKIRTIMO TAŠKAS

Sakykime, duotos dvi tiesės

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad (1)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \quad (2)$$

Jeigu tiesės kertasi, tai egzistuoja bendras tų tiesių taškas, kurio koordinatės tenkina (1) ir (2) lygtis.

Vadinasi, norint rasti bendrą dviejų tiesių tašką, reikia spręsti (1), (2) lygčių sistemą. Sprendžiant tą sistemą, galimi trys atvejai: 1) sistema turi vieną sprendinį $(x_0;\ y_0)$. Taigi tiesės kertasi vieninteliame taške $M_0\ (x_0;\ y_0)$; 2) sistema yra nesuderinta (t. y. neturi sprendinių). Šiuo atveju (1) ir (2) tiesės bendrų taškų neturi, jos yra lygiagrečios; 3) lygčių sistema yra neapibrėžta (turi be galo daug sprendinių). Vadinasi, (1) ir (2) tiesės turi be galo daug bendrų taškų, t. y. jos sutampa.

1 uždavinys. Reikia rasti tiesių $3x+2y-13=0$ ir $4x+y-14=0$ susikirtimo tašką.

△ Išsprendę tų lygčių sistemą, gauname $x=3$, $y=2$. Taigi tiesės kertasi taške, kurio koordinatės yra (3; 2). ▲

2 uždavinys. Reikia rasti tiesių $3x+5y-12=0$ ir $6x+10y+25=0$ susikirtimo tašką.

△ Sistema yra nesuderinta. Sprendinių nėra. Tiesės lygiagrečios. ▲

3 uždavinys. Reikia rasti tiesių $3x-7y+11=0$ ir $6x-14y+22=0$ susikirtimo tašką.

△ Sistema yra neapibrėžta (turi be galo daug sprendinių). Vadinasi, tiesės turi be galo daug bendrų taškų, t. y. sutampa. ▲

§ 41. TIESĖS POLINĖ LYGTIS

Įveskime plokštumoje polinę koordinačių sistemą. Poliumi laikykime tašką O. Tarkime, kad turime tam tikrą tiesę l (118 pav.). Iš poliaus O nubrėžkime statmenį į tiesę ir raide P pažymėkime jų susikirtimo tašką. Raidėmis p ir α žymėkime taško P koordinates, o duotosios tiesės kintamojo taško M koordinates žymėkime r ir φ.

118 pav.

Iš trikampio OPM gauname: $|OP| = |OM| \cos(\varphi-\alpha)$ arba koordinatėmis

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}. \quad (1)$$

Teisingas ir atvirkščias teiginys: kiekvienas taškas, kurio koordinatės tenkina (1) lygtį, priklauso duotajai tiesei.

(1) lygtis yra vadinama *tiesės poline lygtimi.*

Tiesės polinę lygtį lengva gauti iš tiesės normalinės lygties $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$, įrašius $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Skaitytojui rekomenduojame įsitikinti tuo savarankiškai.

1. Raskite tiesę, einančią per tašką A (0; 3) statmenai vektoriui $\mathbf{a}=(2;\ 1)$.

2. Raskite tiesės, einančios per tašką B (3; −2) lygiagrečiai vektoriui $\mathbf{a}=(1;3)$, parametrinę lygtį.

3. Nubrėžkite tiesę, einančią per tašką C (3; —2) ir statmeną vektoriui $\mathbf{n}=(1;\ 4)$.

4. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką D (2; −3) statmenai vektoriui $\mathbf{n}$ (4; −1).

5. Nubrėžkite tiesę, einančią per tašką E (4; −3) lygiagrečiai vektoriui $\mathbf{i}$.

6. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką F statmenai vektoriui $\mathbf{n}=(2;\ 5)$, kai taškas F yra simetriškas taškui K (3; −4) ašies Ox atžvilgiu.

7. Duota atkarpa AB. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per atkarpos AB vidurio tašką ir statmenos tai atkarpai, kai A (3; −2), B (5; −4).

8. Nubrėžkite tiesę, einančią per koordinačių pradžią statmenai vektoriui $\mathbf{n}=(3;4)$.

9. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką A (3; −2) statmenai vektoriui $\mathbf{n}=(3;\ -2)$.

10. Iš tiesių $A(x-2)+B(y+3)=0$ pluošto išskirkite tiesę, statmeną vektoriui $\mathbf{n}=(4;\ 1)$.

11. Nubrėžkite tiesę, einančią per tašką C (0; 3) ir statmeną vektoriui $\mathbf{j}$.

12. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką N (3; 4) statmenai vektoriui $\mathbf{i}$.

13. Nubrėžkite tiesę, einančią per du taškus A (−3; 2) ir B (4; 3).

14. Nubrėžkite tiesę, einančią per koordinačių pradžią ir tašką C (3; −2). Sudarykite jos lygtį.

15. Duotas trikampis A (−5; −5), B (1; 7) ir C (5; −1). Užrašykite trikampio kraštinių ir pusiaukampinių lygtis.

16. Sudarykite lygtis tiesių, einančių per tašką N (4; −3) ir lygiagrečių koordinačių ašims.

17. Sudarykite lygtis tiesių, einančių per tašką P (5; −2) statmenai koordinačių ašims.

18. Nustatykite tiesės $3x-2y-12=0$ susikirtimo su koordinačių ašimis taškus ir nubrėžkite tą tiesę.

19. Raskite tiesių ašines lygtis, kai duotos jų bendrosios lygtys:

1) $2x+3y-6=0$; 2) $2x-3y+6=0$;

3) $3y-2x+6=0$; 4) $2x+3y+6=0$.

20. Kvadrato simetrijos centras yra koordinačių pradžios taškas. Vienos kvadrato kraštinės lygtis yra $x+3y-5=0$. Sudarykite kitų trijų kvadrato kraštinių lygtis.

21. Apskaičiuokite plotą trikampio, kurį koordinatiniame kampe atkerta tiesė $3x-4y-12=0$.

22. Nubrėžkite tiesę taip, kad taškas M (2; 1) būtų jos atkarpos, esančios tarp koordinačių ašių, vidurio taškas.

23. Tiesė atkerta kongruenčias atkarpas pirmojo ketvirčio koordinačių ašyse. Sudarykite tos tiesės lygtį, jeigu trikampio, kurį ji sudaro su koordinačių ašimis, plotas lygus 18.

24. Sudarykite tiesės lygtį, kai žinoma, kad ta tiesė eina per tašką B (0; 8) ir plotas trikampio, jos sudaryto su koordinačių ašimis, lygus 16.

25. Raskite plotą trikampio, kurį tiesė $5x+8y-40=0$ sudaro su koordinačių ašimis.

26. Duota tiesė $2x-3y+5=0$. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką M (4; −5):

1) lygiagrečiai duotajai tiesei;

2) statmenai duotajai tiesei.

27. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką N (−3; 4) ir sudarančios su teigiamąja ašies Oy kryptimi 60° kampą.

28. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką M (3; 5) ir sudarančios su teigiamąja ašies Ox kryptimi 45° kampą.

29. Raskite tiesės $3x-7y+2=0$ krypties koeficientą ir nubrėžkite ją.

30. Raskite lygtį tiesės, einančios per tašką P (3; −5) ir sudarančios su teigiamąja abscisių ašies kryptimi to paties didumo kampą, kaip ir tiesė $4x-3y+9=0$.

31. Kuri iš tiesių $2x-3y+4=0$ ir $x-y=0$ atkerta ilgesnę atkarpą ordinačių ašyje?

32. Taško, pradėjusio judėti iš koordinačių pradžios taško, projekcija ašyje Ox slenka pastoviu greičiu $v_1=3$ m/s teigiamąja ašies kryptimi, o projekcija ašyje Oy slenka pastoviu greičiu $v_2=2$ m/s teigiamąja ašies kryptimi. Raskite taško judėjimo trajektoriją

33. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per tašką M (4; −3) ir sudarančios su teigiamąja abscisių ašies kryptimi to paties didumo kampą, kaip ir tiesė $y=\frac{3}{5}x-2$.

34. Nustatykite, kuri iš tiesių $2x-3y+4=0$ ir $x-y=0$ sudaro didesnį kampą su teigiamąja ordinačių ašies kryptimi.

35. Raskite tiesės $3x-4y+13=0$ posvyrio į teigiamąją abscisių ašies kryptį kampo tangentą ir nustatykite, kokią atkarpą ji atkerta ordinačių ašyje.

36. Užrašykite tokių dviejų tiesių lygtis, kad pirmoji tiesė su teigiamąja abscisių ašimi sudarytų du kartus didesnį kampą negu antroji.

37. Duota tiesė $3x-4y+5=0$. Nustatykite tiesės krypties koeficientą k, jeigu ta tiesė yra:

1) lygiagreti duotajai tiesei;
2) statmena duotajai tiesei.

38. Duota tiesės lygtis $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$. Reikia rasti kampą, kurį ta tiesė sudaro su teigiamąja abscisių ašies kryptimi.

39. Kokį kampą su teigiamąja abscisių ašies kryptimi sudaro tiesė, einanti per taškus A (2; 0) ir B (4; −2)?

40. Raskite šių tiesių krypties koeficientus ir ordinačių ašyje atkertamas atkarpas:
1) $3x-2y+8=0$; 2) $3x-y+3=0$; 3) $x+y-3=0$.

41. Užrašykite tiesės lygtį, žinodami jos krypties koeficientą k ir ašyje Oy atkirstos atkarpos ilgį b:

1) $k=\frac{3}{4}$, $b=2$; 2) $k=2$, $b=-3$;

3) $k=-5$, $b=-3$; 4) $k=-\frac{3}{2}$, $b=5$.

42. Apskaičiuokite tiesės, einančios per taškus A (3; 5) ir B (−2; 4), krypties koeficientą.

43. Tiesė eina per tašką P (−1; 4) ir su teigiamąja abscisių ašies kryptimi sudaro to paties didumo kampą, kaip ir per taškus M_1 (1; 3) ir M_2 (2; 8) einanti tiesė. Užrašykite tiesės lygtį.

44. Raskite kampus tarp tiesių:

1) $x+5y+9=0$ ir $2x-3y+1=0$;
2) $2x+y-5=0$ ir $3x-y+4=0$;
3) $y=-\frac{3}{2}x+6$ ir $2y+3x-7=0$;
4) $2x-3y+12=0$ ir $3x-y+5=0$;
5) $3x+2y-7=0$ ir $2x-3y+9=0$;
6) $y=\frac{2}{3}x+4$ ir $4x-6y+15=0$;
7) $3x-5y+15=0$ ir $5x+3y-15=0$;
8) $y=\frac{2}{3}x-7$ ir $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$;
9) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ir $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$.

45. Įrodykite, kad šios tiesės poromis yra lygiagrečios:

1) $5x+3y-7=0$, $10x+6y+15=0$;
2) $2x-4y+9=0$, $x-2y+9=0$;
3) $2x+7=0$, $4x-9=0$;
4) $y=3$, $3y-25=0$.

46. Kurios iš tiesių 1) $3x+2y-5=0$, 2) $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$, 3) $4x+6y-5=0$ 4) $4x-6y+9=0$ yra statmenos ir lygiagrečios?

47. Užrašykite nurodytųjų tiesių normalines lygtis:

1) $3x-4y-25=0$; 2) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+20=0$; 3) $x+5=0$;

4) $5x-12y+26=0$; 5) $\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y+13=0$.

48. Nustatykite, kurios iš duotųjų tiesių lygčių yra normalinės:

1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+5=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}y-7=0$;

3) $y-3=0$; 4) $-y-15=0$.

49. Apskaičiuokite atstumą d tarp lygiagrečių tiesių:

1) $4x-3y+25=0$, $8x-6y+25=0$;

2) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$;

3) $3x-4y-20=0$, $6x-8y+25=0$.

50. Sudarykite lygtis tiesių, lygiagrečių tiesei $4x-3y-15=0$ ir nutolusių nuo jos atstumu $d=3$.

51. Duotos iškilojo keturkampio viršūnės $A(-6;-2)$, $B(6;7)$, $C(9;3)$ ir $D(1;-3)$. Raskite jo įstrižainių susikirtimo tašką.

52. Per tiesės $5x-2y-10=0$ susikirtimo su koordinačių ašimis taškus nubrėžti statmenys tai tiesei. Užrašykite jų lygtis.

53. Duota tiesė $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$. Raskite tos tiesės atstumą nuo koordinačių pradžios taško.

54. Raskite dviejų tiesių $3x+2y-13=0$ ir $5x-3y-9=0$ susikirtimo tašką.

55. Duota tiesė $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$. Sudarykite lygtį tiesės, einančios per duotosios tiesės susikirtimo su abscisių ašimi tašką, ir statmenos pirmojo koordinatinio kampo pusiaukampinei.

56. Ištirkite duotųjų tiesių porų tarpusavio padėtį (jeigu tiesės kertasi, tai raskite jų susikirtimo taškus):

a) $x+y-3=0$ ir $3x+3y-9=0$;

b) $x=4$ ir $x+y=0$;

c) $y=0$ ir $y-7=0$;

d) $2x+y+1=0$ ir $2x+y+5=0$.

57. Duotos dviejų lygiagretainio kraštinių lygtys $x-4y+11=0$ ir $2x+y-5=0$ ir vienos įstrižainės lygtis $x-y-1=0$. Raskite to lygiagretainio viršūnių koordinates.

58. Per tiesių $3x+2y-13=0$, $x+3y-9=0$ susikirtimo tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti tiesei $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$. Sudarykite jos lygtį.

59. Duotos trikampio viršūnės: $A(2;1)$, $B(-2;3)$ ir $C(-10;-13)$. Raskite ilgį statmens, nubrėžto iš viršūnės B į pusiaukraštinę, išvestą iš viršūnės C.

60. Sudarykite lygtis tiesių, statmenų tiesei $2x+y=0$ ir nutolusių nuo koordinačių pradžios atstumu, lygiu 3.

61. Per tiesių $x-y+4=0$ ir $4x+2y-19=0$ susikirtimo tašką nubrėžkite tiesę, lygiagrečią tiesei $2x-3y+6=0$.

62. Raskite tiesių $2x+3y-13=0$, $x+y=5$ susikirtimo tašką.

63. Duotos trikampio kraštinių lygtys $x-y+4=0$, $4x+2y-19=0$, $5x+6y+9=0$. Raskite jo viršūnių koordinates.

64. Duotos dviejų lygiagretainio kraštinių lygtys $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ ir vienos jo įstrižainės lygtis $3x+2y+3=0$. Raskite lygiagretainio viršūnių koordinates.

65. Raskite šių tiesių porų susikirtimo taškus:

1) $3x-2y-5=0$, $5x+y-17=0$;

2) $4x-3y-7=0$, $2x+3y-17=0$;

3) $2x+5y-29=0$, $5x+2y-20=0$.

66. Duotos trikampio viršūnės $M(0; -2)$, $N(6; 2)$ ir $P(2; 4)$. Sudarykite kraštinės MP, pusiaukraštinės NE ir aukštinės ND lygtis.

67. Duotos trikampio MNP kraštinių lygtys: $3x+4y-5=0$ (MN), $3x-y-10=0$ (NP) ir $-y-2=0$ (MP). Raskite jo viršūnių koordinates.

68. Per tiesių $4x+2y-19=0$ ir $5x+6y+6=0$ susikirtimo tašką nubrėžkite tiesę, statmeną tiesei $x+y+1=0$.

III SKYRIUS

Antrosios eilės kreivės

Antrajame skyriuje aiškinomės pirmojo laipsnio lygčių geometrinę prasmę nežinomųjų x ir y atžvilgiu ir įrodėme štai ką:

1) visų tiesės taškų aibę atitinka pirmojo laipsnio lygtis kintamųjų koordinačių atžvilgiu;

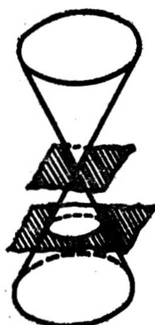
2) aibė visų plokštumos taškų, kurių koordinatės tenkina pirmojo laipsnio lygtį kintamųjų x ir y atžvilgiu, yra tiesė.

Šiame skyriuje nagrinėsime bendrojo pavidalo lygtis

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Linijos, aprašomos antrojo laipsnio lygtimis kintamųjų koordinačių x ir y atžvilgiu, vadinamos *antrosios eilės kreivėmis.*

Antrosios eilės kreives tenka nagrinėti architektūroje, astronomijoje, mechanikoje bei kitose mokslo ir technikos šakose. Jos buvo žinomos jau Senovės Graikijoje, nors graikų matematikai dar nežinojo nei koordinačių metodo, nei lygčių. Todėl jie nagrinėjo įvairiausius kūginio paviršiaus plokštuminius pjūvius.



119 pav.



120 pav.

Kreivės, gaunamos kertant apskritąjį kūginį paviršių plokštuma, vadinamos *kūgio pjūviais.* Tokios linijos yra elipsė, hiperbolė ir parabolė.

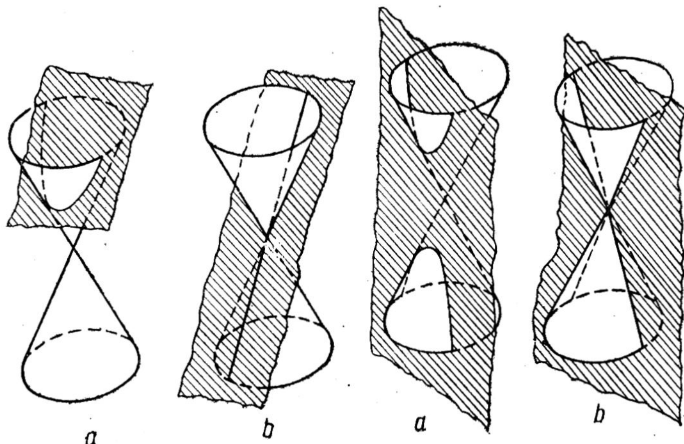
Pabrėžiame, kad *apskrituoju kūginiu paviršiumi* arba *apskrituoju* kūgiu vadinamas paviršius, gaunamas sukant vieną tiesę aplink ją kertančią kitą tiesę. Taigi kūginis paviršius susideda iš dviejų dalių ir yra sudarytas iš tiesių (tiesinės sudaromosios).

Kertant apskritąjį kūginį paviršių plokštuma, galimi šie atvejai:

1) jeigu plokštuma kerta kūginį paviršių statmenai sukimosi ašiai, tai pjūvis yra apskritimas. Jeigu plokštuma eina per kūgio viršūnę, tai pjūvis yra taškas, t. y. išsigimęs apskritimas (119 pav.);

2) jeigu plokštuma kerta tik vieną kūgio dalį ir nėra lygiagreti nė vienai sudaromajai, tai pjūvis yra elipsė (120 pav.);

3) jeigu plokštuma kerta vieną kūginio paviršiaus dalį ir yra lygiagreti vienai sudaromajai, tai pjūvis yra parabolė. Jeigu plokštuma eina per vir-



121 pav. 122 pav.

šūnę ir vieną sudaromąją, tai pjūvis yra tiesė, t. y. išsigimusi parabolė (121 pav.);

4) jeigu plokštuma kerta abi kūginio paviršiaus dalis ir yra lygiagreti kūginio paviršiaus ašiai, tai pjūvis yra hiperbolė. Jeigu kertančioji plokštuma eina per kūgio viršūnę ir kerta abi jo dalis, tai pjūvis yra susikertančių tiesių pora, t. y. išsigimusi hiperbolė (122 pav.).

Kituose paragrafuose išsamiau susipažinsime su tomis nuostabiomis kreivėmis.

§ 42. APSKRITIMAS

Šiame paragrafe iš pradžių išvesime apskritimo lygtį tuo atveju, kai koordinačių sistema yra specialiai parinkta, o paskui ir bendruoju atveju. Paragrafo pabaigoje pateiksime apskritimo, kurio centras yra koordinačių pradžioje, parametrines lygtis.

Apskritimu vadinama aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo duotojo taško, vadinamo apskritimo *centru.*

Sakykime, plokštumos taškas O yra apskritimo centras. Tada, remiantis apskritimo apibrėžimu, bendroji kiekvieno tos aibės taško M savybė aprašoma lygybe

$$|OM|=R. \qquad (1')$$

(1′) lygybė ir yra lygtis apskritimo, kurio centras – taškas O, spindulys R.

Jeigu plokštumoje jau parinkta koordinačių sistema, tai galimi du atvejai:

1) apskritimo centras sutampa su koordinačių pradžia (paprasčiausias atvejis);

2) apskritimo centras yra bet kuris plokštumos taškas.

Norėdami gauti paprasčiausią apskritimo lygtį, perkelkime jo centrą į koordinačių pradžią, t. y. į tašką O. Dabar prisiminkime, kad bet kurio apskritimo taško $M(x;\ y)$ nuotolis nuo centro O, t. y. atstumas $|OM|$, yra pastovus ir lygus apskritimo spinduliui R.

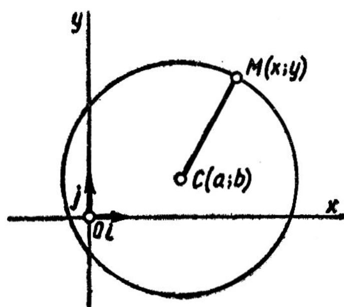
Naudodamiesi atstumo tarp dviejų taškų formule, išreikškime atstumą $|OM|$ taškų $O(0;\ 0)$ ir $M(x;\ y)$ koordinatėmis. Gausime $|OM|=$ $=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, ir todėl $\sqrt{x^2+y^2}=R$. Pakėlę abi lygties puses kvadratu, gauname

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (1)$$

(1) lygybė yra paprasčiausia lygtis apskritimo, kurio centras yra koordinačių pradžia, o spindulys lygus R. Pavyzdžiui, $x^2+y^2=16$ yra lygtis apskritimo, kurio centras koordinačių pradžioje ir spindulys $R=4$, o $x^2+y^2=1$ – lygtis apskritimo, kurio centras koordinačių pradžioje ir $R=1$.

Pateiksime svarbią apskritimo lygties savybę, skiriančią ją nuo tiesės lygties: apskritimo lygtis yra antrojo laipsnio lygtis nežinomųjų x ir y atžvilgiu, todėl apskritimas yra antrosios eilės kreivė.

Išvesime lygtį apskritimo, kurio centras yra bet kuris plokštumos taškas. Tarkime, kad $C(a;\ b)$ – apskritimo centras, R – spindulys, o $M(x;\ y)$ – bet kuris apskritimo taškas, kurio koordinatės x ir y (123 pav.). Kiekvieno apskritimo taško atstumą nuo centro galime išreikšti šitaip: $R=$ $=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.



123 pav.

Pastarosios lygybės abi puses pakėlę kvadratu, gauname

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$

(2) lygybė ir yra lygtis apskritimo, kurio centras taškas C ir spindulys R. Tą lygtį tenkina kiekvieno apskritimo taško koordinatės ir netenkina apskritimui nepriklausančių taškų koordinatės.

Atvirkščiai, kiekvienas taškas $M(x;y)$, kurio koordinatės tenkina (2) lygtį, priklauso apskritimui, nes jo atstumas nuo taško C yra lygus R. Pavyzdžiui,

$$(x-5)^2+(y+3)^2=16 \qquad (3)$$

yra lygtis apskritimo, kurio centras taškas $C(5;\ -3)$ ir spindulys $R=4$, o $(x+6)^2+y^2=25$ yra lygtis apskritimo, kurio centras $C(-6;\ 0)$ ir spindulys $R=5$.

Jeigu bendrąją apskritimo lygtį perdirbtume, t. y. atskliaustume, perkeltume visus narius į kairiąją pusę ir surašytume juos kintamųjų x ir y laipsnių mažėjimo tvarka, tai gautume šitokią apskritimo lygtį:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (4)$$

arba trumpiau

$$x^2+y^2-2ax-2by+p=0; \text{ čia } p=a^2+b^2-R^2. \quad (5)$$

Įrodėme, kad bet kokio apskritimo lygtį galime užrašyti (5) pavidalo lygtimi, kur $p<a^2+b^2$. Ir atvirkščiai, įrodysime, kad ir (5) lygtimi aprašomas realus apskritimas.

Iš tikrųjų,

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2-p)=0 \text{ arba } (x-a)^2+(y-b)^2=$$
$$=(\sqrt{a^2+b^2-p})^2. \quad (6)$$

Pastaroji lygybė rodo, kad kiekvienas linijos taškas $M\,(x;\,y)$ yra nutolęs nuo taško $C\,(a;\,b)$ vienodu atstumu, lygiu $\sqrt{a^2+b^2-p}$. Todėl (5) yra lygtis apskritimo, kurio centras $C\,(a;\,b)$ ir spindulys $R=\sqrt{a^2+b^2-p}$.

Akivaizdu, kad (5) lygtis yra bendrosios antrojo laipsnio lygties su dviem kintamaisiais

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad (7)$$

atskiras atvejis.

Lygindami (5) apskritimo lygtį su bendrąja antrojo laipsnio lygtimi su dviem kintamaisiais, pastebime, kad (7) lygtis aprašo apskritimą, kai $A=C$, $B=0$ ir $\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}>F$.

Pavyzdžiui, $x^2+y^2-10x+6y+30=0$ yra apskritimo lygtis, nes $A=C=1$, $B=0$ ir $5^2+3^2>30$, o $x^2-y^2+20x-12y-15=0$ nėra apskritimo lygtis, nes $A=1$, o $C=-1$. Lygtis $x^2+y^2+6xy-4x+8y+50=0$ taip pat nėra apskritimo lygtis, nes $B=3\neq 0$.

1 uždavinys. Reikia sudaryti lygtį apskritimo, kurio centras yra koordinačių pradžioje ir spindulys $R=7$.

△ Įrašę į (1) lygtį spindulio reikšmę, iš karto gauname $x^2+y^2=$ $=49$. ▲

2 uždavinys. Reikia užrašyti lygtį apskritimo, kurio centras $C\,(3;\,-6)$, o spindulys lygus 9.

△ Įrašę taško C koordinates ir spindulio reikšmę į (2) išraišką, gauname $(x-3)^2+\big(y-(-6)\big)^2=81$ arba $(x-3)^2+(y+6)^2=81$. ▲

3 uždavinys. Reikia rasti apskritimo $(x+3)^2+(y-5)^2=100$ centrą ir spindulį.

△ Lygindami duotąją lygtį su (2) bendrąja apskritimo lygtimi, gauname $a=-3$, $b=5$, $R=10$. Vadinasi, $C\,(-3;\,5)$, $R=10$. ▲

4 uždavinys. Remiantis duotąja linijos lygtimi $x^2+y^2+4x-2y-4=0$, reikia išaiškinti jos geometrines savybes.

△ Pertvarkome kairiąją duotosios lygties pusę, išskirdami reiškinių su kintamaisiais x ir y kvadratus. Tuo tikslu duotąją lygtį užrašome kitaip:

$$x^2+4x+y^2-2y-4=0,$$

arba

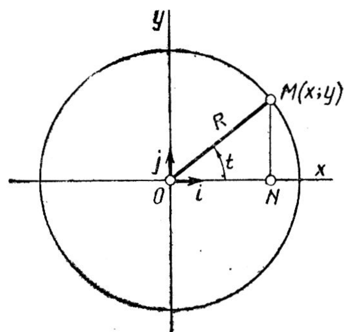
$$x^2+4x+4-4+y^2-2y+1-1-4=0,$$

arba

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9.$$

Tai yra apskritimo, kurio centras $C(-2;\ 1)$ ir $R=3$, lygtis. ▲

Apskritimo parametrinės lygtys. Sakykime, stačiakampėje koordinačių sistemoje duota apskritimo, kurio centras sutampa su koordinačių pradžia, lygtis $x^2+y^2=R^2$. Imkime bet kokį tašką $M(x;\ y)$ (124 pav.). Sakykime, taško M spindulys vektorius $\overrightarrow{OM}$ su teigiamąja ašies Ox kryptimi sudaro kampą t. Tada taško M abscisė ir ordinatė priklauso nuo kampo t didumo. Išreiškę x ir y dydžiu t, gauname



124 pav.

$$x=R\cos t;\quad y=R\sin t. \tag{8}$$

Dydis t vadinamas *parametru* (jis kinta nuo 0 iki 2π). (8) lygtys vadinamos *apskritimo, kurio centras yra koordinačių pradžioje, parametrinėmis lygtimis.* (8) lygtis pakėlę kvadratu ir sudėję, gausime

$$x^2+y^2=R^2(\cos^2 t+\sin^2 t) \text{ arba } x^2+y^2=R^2.$$

Tai yra jau žinoma apskritimo lygtis.

§ 43. STAČIAKAMPĖS DEKARTO KOORDINAČIŲ SISTEMOS TRANSFORMACIJOS

Parinkus stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą, nustatoma abipus vienareikšmė atitiktis tarp plokštumos taškų ir sutvarkytų realiųjų skaičių porų. Tai reiškia, kad kiekvieną plokštumos tašką atitinka vienintelė skaičių pora ir kiekvieną sutvarkytą realiųjų skaičių porą atitinka vienintelis taškas.

Pastebėsime, kad koordinačių sistema plokštumoje iš esmės parenkama laisvai. Parinkus kitą koordinačių sistemą, vienas ir tas pats plokštumos taškas skirtingose koordinačių sistemose turės skirtingas koordinates.

Taškų aibė (linija) skirtingose koordinačių sistemose bus aprašoma skirtingomis lygtimis.

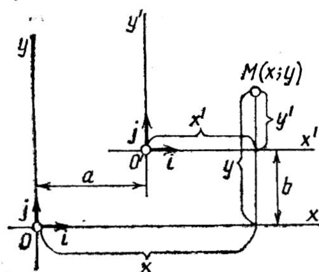
Linijos lygtimi linija aprašoma ne tik kaip geometrinis objektas, bet ir nusakoma jos padėtis plokštumoje pasirinktosios koordinačių sistemos atžvilgiu.

Lygiagretusis postūmis. Sakykime, duota tam tikra stačiakampė Dekarto koordinačių sistema xOy. Pavadinkime ją „senąja". Parinkime kitą „naująją" koordinačių sistemą $x'O'y'$, kurios pradžia yra kitas taškas, bet koordinačių ašys yra tos pačios krypties ir lygiagrečios senosioms

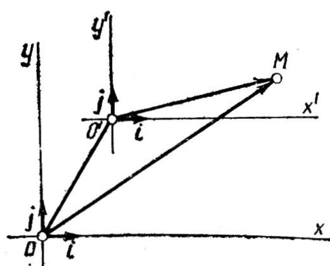
ašims. Dabar galime sakyti, kad naujoji koordinačių sistema gauta iš senosios lygiagrečiu postūmiu (125 pav.).

Lygiagretusis koordinačių sistemos xOy postūmis – tai senosios koordinačių sistemos xOy pakeitimas naująja koordinačių sistema $x'O'y'$. Naujosios koordinačių sistemos padėtį senosios koordinačių sistemos atžvilgiu apibūdina naujojo pradžios taško O' koordinatės a ir b senojoje koordinačių sistemoje (xOy).

Tarkime, kad taško M koordinatės senojoje koordinačių sistemoje yra x ir y, o naujojoje koordinačių sistemoje – x' ir y'. Ieškosime sąryšio tarp senųjų taško M koordinačių, t. y. skaičių x ir y, ir naujųjų koordinačių x' ir y'.



125 pav.



126 pav.

Sujunkime poromis taškus O ir O', O' ir M, O ir M. Remiantis 126 paveikslu, lengva pastebėti, kad

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \qquad (1)$$

Kiekvieną duotąjį vektorių galima išskaidyti šitaip:

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

$$\overrightarrow{OO'} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j},$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}.$$

Dabar (1) lygybę užrašysime taip:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) + (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}),$$

arba

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (a + x')\mathbf{i} + (b + y')\mathbf{j};$$

iš čia

$$x = a + x', \qquad (2)$$

$$y = b + y'.$$

Kadangi naujasis koordinačių pradžios taškas O' ir taškas M yra bet kokie plokštumos taškai, tai (2) formulės yra teisingos, kad ir kokia būtų tų taškų tarpusavio padėtis.

Lygiagrečiojo postūmio koordinatinės formulės žodžiais nusakomos šitaip: *senoji koordinatė yra lygi vienavardės naujosios koordinatės ir vienavardės naujojo pradžios taško koordinatės senojoje sistemoje sumai.*

(2) formules galime užrašyti šitaip:

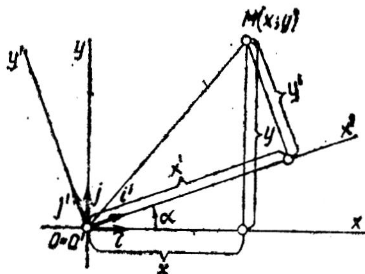
$$x' = x - a,$$

$$y' = y - b. \qquad (3)$$

Remdamiesi (2) formulėmis, randame senųjų koordinačių išraiškas naujosiomis, o remdamiesi (3) formulėmis, – naujųjų koordinačių išraiškas senosiomis.

Ašių posūkis. Sakykime, naujosios koordinačių ašys Ox' ir Oy' gaunamos pasukus senąsias ašis Ox ir Oy kampu α. Taško M koordinates pažymėję $(x; y)$ senojoje koordinačių sistemoje ir $(x'; y')$ naujojoje koordinačių sistemoje, galėsime užrašyti posūkio formules, išreiškiančias senąsias koordinates x ir y naujosiomis (127 pav.):

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \qquad (4)$$



127 pav.

Išsprendę (4) lygtis naujųjų koordinačių x' ir y' atžvilgiu, gauname

$$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$
$$y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha. \qquad (5)$$

1 uždavinys. Sakykime, naujojo pradžios taško koordinatės senosios sistemos atžvilgiu yra (2; 3), o taško A koordinatės senojoje sistemoje yra (4; -1). Reikia rasti taško A koordinates naujojoje koordinačių sistemoje.

△ Iš (3) formulių gauname $x' = 4 - 2 = 2$, $y' = -1 - 3 = -4$. Taško A koordinatės naujojoje sistemoje yra (2; -4). ▲

2 uždavinys. Naujojo pradžios taško koordinatės senosios sistemos atžvilgiu yra (5; -2), o taško N koordinatės senojoje sistemoje yra (6; 0). Reikia rasti taško N koordinates naujojoje sistemoje.

△ Iš (3) formulių gauname $x' = x - a = 6 - 5 = 1$, $y' = y - b = 0 - (-2) = 2$. Taško N naujosios koordinatės yra (1; 2). ▲

3 uždavinys. Sakykime, taško P koordinatės yra (-2; 1) senosios koordinačių sistemos atžvilgiu ir (5; 3) naujosios koordinačių sistemos atžvilgiu. Reikia rasti senąsias naujojo pradžios taško koordinates.

△ Užrašome (2) formules šitaip: $a = x - x'$, $b = y - y'$. Įrašę x ir x' reikšmes, gauname $a = -2 - 5 = -7$, $b = 1 - 3 = -2$. Taigi $O'(-7; -2)$. ▲

4 uždavinys. Sakykime, naujojo pradžios taško koordinatės senosios koordinačių sistemos atžvilgiu yra (-3; 4), o naujosios taško Q koordinatės yra (2; -5). Reikia rasti senąsias taško Q koordinates.

△ Iš (2) formulių gauname $x = a + x' = -3 + 2 = -1$, $y = b + y' = 4 - 5 = -1$. Taško Q koordinatės senojoje sistemoje yra (-1; -1). ▲

5 uždavinys. Duota hiperbolės lygtis $xy=2$. Reikia rasti tos hiperbolės lygtį naujojoje koordinačių sistemoje, gautoje senąsias ašis pasukus 45° kampu prieš laikrodžio rodyklės judėjimo kryptį.

△ Jeigu $\alpha=45°$, tai $\sin\alpha=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vadinasi, (4) formulės šiuo atveju virsta šitokiomis:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=x'\frac{\sqrt{2}}{2}+y'\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y').$$

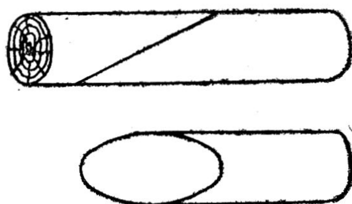
Dabar, įrašę kintamųjų x ir y reikšmes į hiperbolės lygtį $xy=2$, gauname

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=2 \text{ arba } (x')^2-(y')^2=4. \ ▲$$

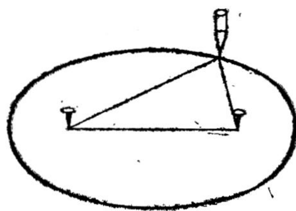
§ 44. ELIPSĖ

Kiekvienas žmogus, dar nepradėjęs lankyti mokyklos, jau žino šią gražią simetrišką liniją. Nuolatos ją matome kaip apskritimo vaizdą, kai tas apskritimas yra plokštumoje, nestatmenoje stebėjimo krypčiai (kaip pasvirąjį pjūvį kūginių ir cilindrinių kūnų: medžio, dešros, morkos ir kt.). Labai dažnai susiduriame su elipse, bet ne visi žino, kaip ją nubrėžti.

Nedidelį šabloną elipsei brėžti galime gauti, nupjovę nustatytu kampu apvalaus atitinkamo skersmens rąsto dalį (128 pav.).



128 pav.



129 pav.

Pažiūrėkime, kaip sodininkas nužymi elipsės formos lysvę, kaip dažytojas brėžia elipsės kontūrą luboms puošti arba kaip stalius brėžia elipsę, gamindamas rėmą ar stalą.

Kad būtų paprasčiau, aprašysime, kaip nužymėti elipsės formos lysvę, nekreipiant dėmesio į jos matmenis ir formą.

Bet kokiu atstumu (pavyzdžiui, lygiu 1 m) įkalsime į žemę du kuolelius; paskui paimsime ploną, maždaug tris kartus ilgesnę virvutę ir, surišę jos galus, uždėsime ant kuolelių. Įtempę virvutę, trečiuoju kuoleliu brėšime elipsę (129 pav.).

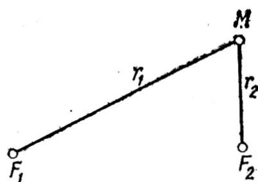
Jeigu, esant tam pačiam virvutės ilgiui, pakeisime atstumą tarp kuolelių ir vėl brėšime elipsę, tai jos forma ir matmenys bus pasikeitę (elipsė

bus ištįsusi arba suapvalėjusi). Taip elipsę brėžia daug kas, bet ne visi žino elipsės matmenų ir formos priklausomybę nuo virvutės ilgio ir atstumo tarp kuolelių; jiems tenka kiekvieną kartą tuos matmenis parinkti bandymu. Mums tai paaiškės iš tolesnio dėstymo, pateikus elipsės apibrėžimą ir išvedus jos lygtį.

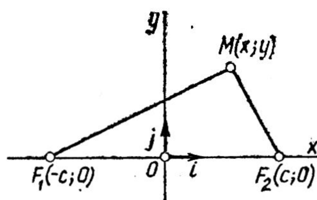
Elipse vadinama aibė visų plokštumos taškų, kurių kiekvieno atstumų nuo dviejų duotųjų taškų suma yra pastovi.

Duotieji taškai vadinami elipsės *židiniais*, o atstumas tarp jų – *atstumu tarp židinių*. Elipsės židinius žymime F_1 ir F_2, o atstumą tarp jų $|F_1F_2| = 2c$.

Sakykime, duoti trys plokštumos taškai: židiniai F_1 ir F_2 ir bet kuris elipsei priklausantis taškas M (130 pav.). Taško M atstumas nuo židinio F_1 ir nuo F_2 vadinamas *židininiu spinduliu* ir žymimas atitinkamai r_1 ir r_2: $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$.



130 pav.



131 pav.

Remiantis elipsės apibrėžimu, jų suma $|F_1M| + |F_2M|$ yra pastovi ir, pažymėjus ją $2a$,

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a. \tag{1'}$$

(1′) lygybė ir yra elipsės lygtis.

Parinkime koordinačių sistemą taip, kad abu židiniai būtų abscisių ašyje; ordinačių ašį išveskime statmenai atkarpai F_1F_2 per jos vidurio tašką. Tada židinių koordinatės bus $F_1(-c;\ 0)$ ir $F_2(c;\ 0)$ (131 pav.).

Sakykime, $M(x;\ y)$ – bet kuris elipsės taškas. Remdamiesi atstumo tarp dviejų taškų formule, išreiškiame židininius spindulius $r_1 = |F_1M|$ ir $r_2 = |F_2M|$:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ ir } r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

Remiantis elipsės apibrėžimu, kiekvienas jos taškas tenkina lygybę

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{2}$$

(2) lygybė yra būtina ir pakankama sąlyga, kad taškas $M(x;\ y)$ priklausytų elipsei.

□ Remiantis (1) formulėmis, (2) lygybę galima užrašyti šitaip:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

(3) lygtis yra elipsės lygtis duotosios koordinačių sistemos atžvilgiu.

Tą lygtį galime paprasčiau užrašyti. Tuo tikslu padauginsime ją iš šaknų, esančių dešiniojoje (3) lygybės pusėje, skirtumo. Gausime

$$4cx = 2a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

arba

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2\frac{c}{a}x. \quad (4)$$

Sudėsime (3) ir (4) lygybes:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x. \quad (5)$$

Abi (5) lygybės puses pakelsime kvadratu:

$$(x+c)^2+y^2 = \left(a+\frac{c}{a}x\right)^2.$$

Atskliautę ir suprastinę, gausime

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2 = a^2-c^2.$$

Kadangi $2a>2c$, tai $a^2-c^2>0$. Pažymėję $b^2=a^2-c^2$, gauname

$$\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=b^2.$$

Padaliję abi pastarosios lygybės puses iš $b^2\neq 0$, turime

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (6)$$

Tokia elipsės lygtis vadinama *kanonine* (paprasčiausia) lygtimi. Kanoninė elipsės lygtis dažnai užrašoma ir šitaip:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Gautoji (6) lygtis yra (3) elipsės lygties išvada. Todėl bet kurio elipsės taško M koordinatės x ir y, susietos (3) lygtimi, tenkins (6) lygtį.

Dabar įrodysime atvirkštinį teiginį. Jeigu taško $N(x;\ y)$ koordinatės tenkina (6) lygtį, tai N yra elipsės taškas. Sakykime, taško N koordinatės tenkina (6) lygtį.

Iš (6) lygybės gautą y^2 reikšmę įrašome į dešiniąją (1) lygybės pusę (r_1 rasti):

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \sqrt{c^2+b^2+2cx+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}.$$

Kadangi $a^2-c^2=b^2$, tai

$$r_1 = \sqrt{a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a+\frac{c}{a}x\right|.$$

Panašiai randame

$$r_2=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|.$$

Atsižvelgę į tai, kad $a>c>0$ ir $|x|\leqslant a$, turime $a+\frac{c}{a}x>0$ ir $a-\frac{c}{a}x>0$.

Vadinasi, imant bet kokį tašką N, $r_1=a+\frac{c}{a}x$, $r_2=a-\frac{c}{a}x$. Todėl $r_1+r_2=2a$; taigi taškas N priklauso elipsei. ■

§ 45. ELIPSĖS FORMOS TYRIMAS, NAUDOJANTIS ELIPSĖS LYGTIMI

Sakykime, duota elipsė, aprašyta kanonine lygtimi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (1)$$

čia $b^2=a^2-c^2$.

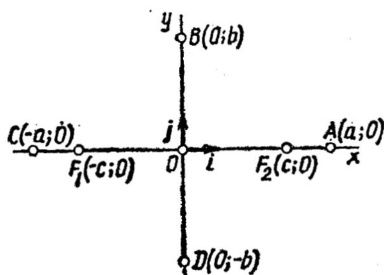
1. Elipsė neina per koordinačių pradžią, nes taško $O(0;\ 0)$ koordinatės elipsės lygties netenkina.

2. Norint rasti (1) elipsės susikirtimo su ašimi Ox taškus, reikia spręsti sistemą

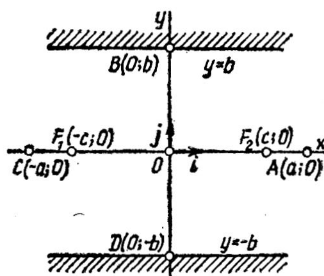
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0.$$

Elipsės susikirtimo su ašimi Ox taškas turi ordinatę $y=0$ ir priklauso elipsei. Įrašę $y=0$ į elipsės lygtį, gauname $x=\pm a$.

Taigi elipsės susikirtimo su ašimi Ox taškai yra $A(a;\ 0)$ ir $C(-a;\ 0)$. Panašiai randame elipsės susikirtimo su ašimi Oy taškus $B(0;\ b)$ ir $D(0;\ -b)$ (132 pav.).



132 pav.



133 pav.

Taškus A, B, C ir D vadiname elipsės *viršūnėmis*.

Atkarpa AC, $|AC|=2a$, kuri yra tarp elipsės viršūnių ir kuriai priklauso elipsės židiniai F_1 ir F_2, vadinama elipsės *didžiąja ašimi*. Atkarpa BD, $|BD|=2b$, vadinama elipsės *mažąja ašimi*. Skaičiai a ir b vadinami elipsės *pusašėmis*.

3. Į (1) lygtį įeina tik antrieji kintamųjų x ir y laipsniai. Vadinasi, jeigu taško $N(x; y)$ koordinatės tenkina (1) lygtį, tai tą lygtį tenkina ir taškų $N_1(-x; y)$, $N_2(x; -y)$, $N_3(-x; -y)$ koordinatės. Aišku, taškas N_1 simetriškas taškui N ordinačių ašies atžvilgiu, taškas N_2 simetriškas taškui N abscisių ašies atžvilgiu, o taškas N_3 simetriškas taškui N koordinačių pradžios atžvilgiu.

Taigi elipsė turi dvi simetrijos ašis, statmenas viena kitai. Elipsės simetrijos ašių susikirtimo taškas vadinamas jos *centru*.

4. Norėdami nustatyti kintamojo y kitimo sritį, iš (1) elipsės lygties išreiškiame x^2:

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right). \qquad (2)$$

Kadangi x^2 visada didesnis arba lygus nuliui, t. y. $x^2 \geqslant 0$, tai $1 - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 0$, arba $y^2 \leqslant b^2$; $-b \leqslant y \leqslant b$.

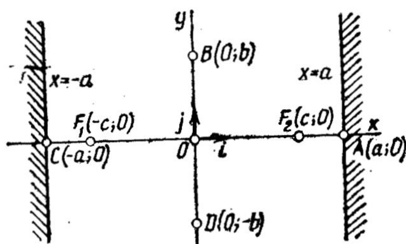
Iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad elipsės taškai, išskyrus jos viršūnes, yra plokštumos juostoje, esančioje tarp dviejų tiesių $y=b$ ir $y=-b$ (133 pav.).

Norėdami nustatyti kintamojo x kitimo sritį, iš (1) elipsės lygties išreiškiame y^2:

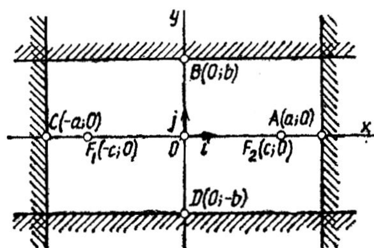
$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \qquad (3)$$

Kadangi y^2 visada didesnis arba lygus nuliui, t. y. $y^2 \geqslant 0$, tai $1 - \frac{x^2}{a^2} \geqslant 0$, arba $x^2 \leqslant a^2$; $-a \leqslant x \leqslant a$.

Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia, kad elipsės taškai, išskyrus jos viršūnes, yra plokštumos juostoje, esančioje tarp dviejų tiesių $x=-a$ ir $x=a$ (134 pav.) .



134 pav.



135 pav.

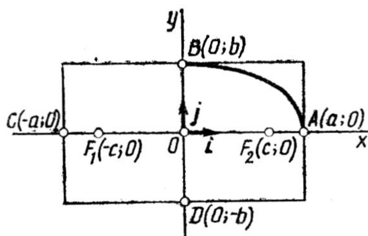
Taigi galime tvirtinti, kad visi elipsės taškai yra tiesėmis $x = \pm a$, $y = \pm b$ apriboto stačiakampio viduje, o elipsės viršūnės yra tose tiesėse (135 pav.). Dabar išsiaiškinsime kreivės padėtį stačiakampyje.

(2) ir (3) lygybes užrašome šitaip:

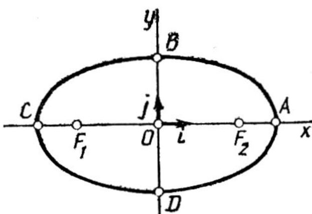
$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (4)$$

Iš pastarųjų lygybių išplaukia, kad, y didėjant nuo $y=0$ iki $y=b$, kintamasis x mažėja nuo $x=a$ iki $x=0$ (ir atvirkščiai).

Norint gauti tikslesnį elipsės padėties plokštumoje vaizdą, reikia atidėti keletą jos taškų. Tuos taškus galima imti tik iš pirmojo ketvirčio, nes kreivė yra simetriška koordinačių ašių atžvilgiu (136 pav.). Elipsė pavaizduota 137 paveiksle.



136 pav.



137 pav.

1 uždavinys. Reikia užrašyti lygtį elipsės, kurios pusašės yra $a=5$, $b=3$.

△ Įrašę pusašių ilgių reikšmes į kanoninę elipsės lygtį, gauname

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1, \text{ arba } \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1. \ ▲$$

2 uždavinys. Reikia sudaryti lygtį elipsės, kurios viena ašis, lygi 12, yra ordinačių ašyje, o antroji priklauso abscisių ašiai ir yra lygi 8.

△ Iš uždavinio sąlygų $b=6$, $a=4$. Vadinasi,

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1, \text{ arba } \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1. \ ▲$$

3 uždavinys. Reikia rasti elipsės lygtį, jeigu jos didžioji ašis, lygi 20, yra ordinačių ašyje, o atstumas tarp židinių lygus 16.

△ Rašome ieškomąją elipsės lygtį: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Kadangi $2c=16$, $2b=$ $=20$, tai $c=8$, $b=10$. Židiniai priklauso ašiai Oy, taigi $b^2-a^2=c^2$, t. y. $a^2=b^2-c^2$ arba, įrašius reikšmes, $a^2=100-64=36$. Iš čia $a=6$. Galutinai ieškomosios elipsės lygtis yra

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1. \ ▲$$

4 uždavinys. Reikia rasti elipsės $25x^2+16y^2=400$ ašių ilgius ir apskaičiuoti židinių koordinates.

△ Duotąją elipsės lygtį užrašome šitaip:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1;$$

iš čia

$$a=\sqrt{16}=4, \ b=\sqrt{25}=5, \ 2a=8, \ 2b=10,$$

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3.$$

Galutinai gauname $F_1(0;\ 3)$, $F_2(0;\ -3)$. ▲

§ 46. ELIPSĖS EKSCENTRICITETAS

Išnagrinėkime dvi elipses, aprašytas kanoninėmis lygtimis

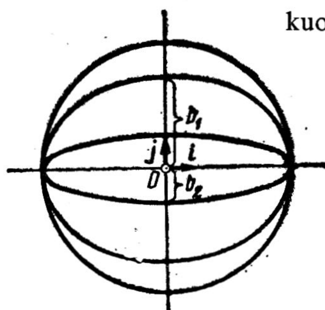
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \qquad (1)$$

ir

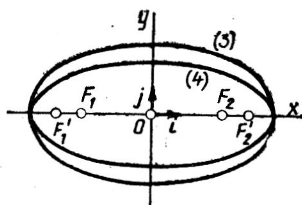
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1. \qquad (2)$$

(1) ir (2) elipsės didžiosios ašys lygios ir $b_1>b_2$ (138 pav.).

Nesunku pastebėti, kad elipsės forma priklauso nuo santykio $\frac{b}{a}$ reikšmės: kuo tas santykis mažesnis, tuo labiau elipsė suspausta, ir atvirkščiai, kuo santykis $\frac{b}{a}$ didesnis, tuo elipsė apvalesnė.



138 pav.



139 pav.

Praktiškai elipsės formą patogiau apibūdinti ne santykiu $\frac{b}{a}$, bet didžiosios elipsės ašies a santykiu su puse atstumo tarp židinių. Tas santykis vadinamas elipsės *ekscentricitetu* ir žymimas $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Kadangi $c<a$, tai $0\leqslant\varepsilon<1$. Kuo didesnis ekscentricitetas (kai a fiksuotas), tuo didesnė pusė atstumo tarp židinių, t. y. elipsė yra labiau suspausta; kuo ekscentricitetas mažesnis, tuo elipsė „apvalesnė". Kai $\varepsilon=0$, elipsė virsta apskritimu.

Uždavinys. Duotos dvi elipsės: 1) $16x^2+25y^2-400=0$; 2) $9x^2+$ $+25y^2-225=0$.

Reikia palyginti jas.

△ Elipsių lygtis užrašome šitaip:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad (3)$$

ir

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1. \qquad (4)$$

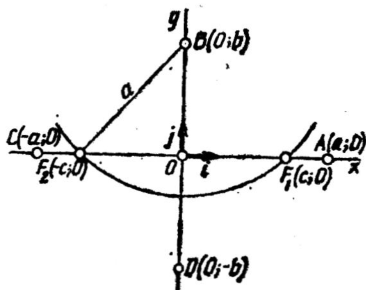
Iš (3) lygybės $a_1=5$, $b_1=4$. Taigi $c_1=\sqrt{25-16}=3$, o $\varepsilon_1=\frac{3}{5}$. Iš (4) lygybės $a_2=5$, $b_2=3$. Taigi $c_2=\sqrt{25-9}=4$, o $\varepsilon_2=\frac{4}{5}$. Vadinasi, (4) elipsė labiau suspausta didžiosios ašies atžvilgiu negu (3) elipsė (139 pav.).

§ 47. ELIPSĖS BRĖŽIMAS

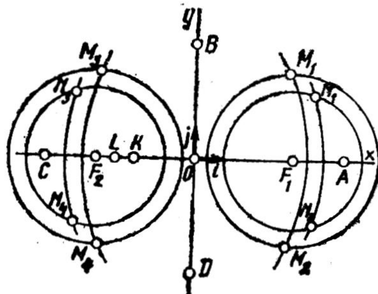
Sakykime, duota elipsės lygtis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Koordinačių ašyse atidėsime elipsės viršūnes $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(-a;\ 0)$ ir $D(0;\ -b)$ (140 pav.), po to iš mažosios ašies galinio taško B spinduliu, lygiu a, padarysime atžymas didžiojoje ašyje. Nesunku pastebėti, kad tai bus elipsės židiniai, nes $a^2-c^2=b^2$.



140 pav.



141 pav.

Toliau didžiojoje ašyje tarp židinių paimsime bet kokį tašką K, kuris padalys didžiąją ašį į dvi dalis – židininius spindulius r_1 ir r_2, $r_1+r_2=2a$. Laikydami tašką F_1 centru, brėšime spindulio r_1 apskritimą; iš taško F_2 brėšime spindulio r_2 apskritimą. Pastebėsime, kad tie apskritimai turi du susikirtimo taškus M_1 ir M_2. Sukeitę centrus, gausime simetriškus taškus M_3 ir M_4.

Jeigu imsime kitą didžiosios ašies tašką, tai rasime dar keturis elipsės taškus N_1, N_2, N_3, N_4 ir t. t. Kuo daugiau elipsės taškų turėsime, tuo tiksliau galėsime nubrėžti kreivę (141 pav.).

Pateiksime kitą elipsės taško radimo būdą.

Sakykime, reikia rasti keletą elipsės $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ taškų. Laikydami koordinačių pradžią centru, brėšime du apskritimus, kurių spinduliai $r_1=a$ ir $r_2=b$; didesnysis apskritimas kirs abscisių ašį viršūnėse $A(a;0)$ ir $C(-a;\ 0)$, o mažesnysis kirs ordinačių ašį viršūnėse $B(0;\ b)$ ir $D(0;\ -b)$.

Per koordinačių pradžią nubrėšime bet kokią tiesę l_1. Ji kirs apskritimus taškuose M_1, M_2 ir N_1, N_2. Per taškus M_1 ir M_2 brėšime statmenis ašiai Ox (l_2 ir l_3), o iš taškų N_1 ir N_2 – tieses l_4 ir l_5, lygiagrečias tai ašiai. Tiesių l_2, l_3, l_4 ir l_5 susikirtimo taškai bus K_1, K_2, K_3 ir K_4 (142 pav.).

Kadangi per koordinačių pradžią galima nubrėžti kiek norima tiesių, tai tuo būdu galima rasti kiek norima elipsės taškų.

Kad tie taškai priklausys elipsei, įrodykite savarankiškai.

§ 48. ELIPSĖS PARAMETRINĖS LYGTYS

Sakykime, stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje duota elipsė

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

(kad būtų paprasčiau, laikysime $a>b$).

Iš elipsės centro brėšime du apskritimus; vieną spindulio $R=a$, kitą spindulio $r=b$. Iš elipsės centro O išvesime bet kokį spindulį ir raide t pažymėsime jo polinį kampą (143 pav.). Sakykime, P yra to spindulio susikirtimo su mažuoju apskritimu taškas, o Q – susikirtimo su didžiuoju apskritimu taškas. Per tašką P nubrėšime tiesę, lygiagrečią ašiai Ox, o per tašką Q – tiesę, lygiagrečią ašiai Oy. Sakykime, M – tų tiesių susikirtimo taškas, o P_1 ir Q_1 – taškų P ir Q projekcijos abscisių ašyje.

143 paveiksle nesunku pastebėti, kad taško M koordinatės išreiškiamos parametru t:

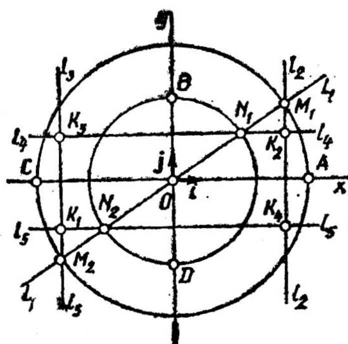
$$x=|OQ_1|=|OQ|\cdot\cos t=a\cos t,$$

$$y=|Q_1M|=|P_1P|=|OP|\cdot\sin t=b\sin t,$$

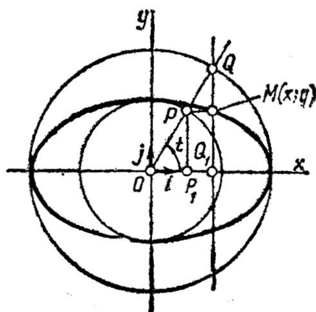
arba

$$x=a\cos t,$$
$$y=b\sin t. \qquad (2)$$

Dabar įrodysime, kad (2) formulės yra (1) elipsės lygtys.



142 pav.



143 pav.

□ Įrašę (2) x ir y išraiškas į (1) elipsės lygtį, gauname

$$\frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t)^2}{b^2}=1.$$

Suprastinę gauname $\cos^2 t+\sin^2 t\equiv 1$. Vadinasi, (2) lygtys yra elipsės lygtys. Jos vadinamos elipsės *parametrinėmis lygtimis.* ■

Parametrinėmis lygtimis remiamasi braižant elipsę. Jau žinome, kaip nubrėžti elipsės tašką. Braižant elipsę šiuo būdu, apskritimas dalijamas į n dalių, brėžiama n atitinkamų tiesių ir gaunama n elipsės taškų. Skai-

čius n parenkamas, atsižvelgiant į turimas braižymo priemones ir būtiną brėžinio tikslumą.

1 uždavinys. Duota elipsė $9x^2+16y^2=144$. Reikia užrašyti jos parametrines lygtis.

△ Užrašysime tos elipsės kanoninę lygtį:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;$$

$a^2=16$, $b^2=9$, vadinasi, $a=4$, $b=3$. Remdamiesi (2) lygtimis, gauname

$$x=4\cos t,$$

$$y=3\sin t. \ ▲$$

2 uždavinys. Duotos elipsės parametrinės lygtys

$$x=5\cos t,$$

$$y=3\sin t.$$

Reikia rasti jos kanoninę lygtį.

△ Iš (2) formulių gauname $a=5$, $b=3$, taigi elipsės kanoninė lygtis yra

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1. \ ▲$$

§ 49. ELIPSĖ KAIP APSKRITIMO PROJEKTACIJA PLOKŠTUMOJE

Sakykime, duotos dvi susikertančios plokštumos: α – pasviroji ir β – horizontalioji. Horizontaliojoje plokštumoje įvesime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą xOy. Abscisių ašimi laikysime plokštumų α ir β susikirtimo liniją ir išvesime ordinačių ašį Oy. Plokštumoje α brėšime spindulio R apskritimą k, kurio centras O sutaps su plokštumos β koordinačių pradžia. Nagrinėsime ortogonaliąsias apskritimo k taškų aibės projekcijas plokštumoje β. Tų projekcijų aibę žymėsime k'. Dabar įrodysime, kad aibė k' yra elipsė. Raide a pažymėsime apskritimo k spindulį, o raide φ – smailiojo kampo tarp plokštumų α ir β didumą.

Sakykime, P – bet koks apskritimo k taškas, M – jo projekcija plokštumoje, Q – jo projekcija ašyje Ox, o t – atkarpos OP ir ašies Ox sudaromo kampo didumas. Dabar taško M koordinates galime išreikšti dydžiu t. Iš stačiųjų trikampių OPQ ir PQM gauname

$$x=|OQ|=|OP|\cos t=a\cos t,$$

$$y=|QM|=|QP|\cos\varphi=|OP|\sin t\cos\varphi=a\cos\varphi\sin t.$$

Pastovų dydį $a\cos\varphi$ pažymėję raide b, galime užrašyti

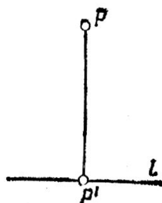
$$x=a\cos t,$$

$$y=b\sin t.$$

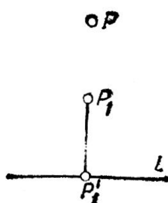
Aibės k' taškai susieti elipsės parametrinėmis lygtimis; vadinasi, linija k' yra elipsė, kurios didžioji pusašė lygi a, o mažoji $b=a\cos\varphi$.

§ 50. ELIPSĖ KAIP APSKRITIMAS, SUSPAUSTAS SKERSMENS ATŽVILGIU

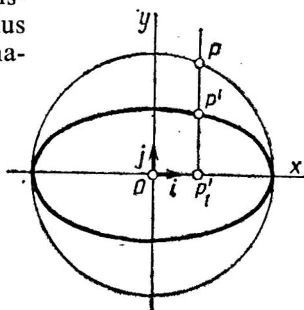
Norėdami geriau įsivaizduoti plokštumos suspaudimą tiesės atžvilgiu, atlikime (bent mintimis) šitokį bandymą. Plokštumos modeliu laikykime įtemptą guminę juostelę. Joje statmenai įtempimo krypčiai išveskime tiesę l ir pažymėkime bet kokį tašką P (144 pav.), po to juostelę atleiskime ir pažiūrėkime, kaip pasikeis taško P padėtis tiesės l atžvilgiu. Aišku, taškas P priartės prie tiesės l (145 pav.). Jeigu įtemptoje juostelėje nubraižysime stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą, laikydami tiesę l ašimi Ox, tai, atleidus juostelę, pasikeis tik plokštumos taškų ordinatės, o abscisės liks tos pačios.



144 pav.



145 pav.



146 pav.

Plokštumos transformacija, kai bet kurio taško $M(X; Y)$ vaizdas yra toks taškas $M'(x; y)$, kad

$$\left.\begin{aligned} X &= x, \\ Y &= ky, \quad k > 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

vadinama *plokštumos suspaudimu ašies Ox atžvilgiu.*

Sakykime, duotas apskritimas

$$X^2 + Y^2 = a^2. \qquad (2)$$

Atlikime visų jo taškų transformaciją, aprašytą (1) formulėmis; imkime $k = \frac{a}{b}$. Šiuo atveju transformacijos formulės bus šitokios:

$$\left.\begin{aligned} X &= x, \\ Y &= \frac{a}{b}\, y. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Įrašę (3) X ir Y išraiškas į (2) apskritimo lygtį, gauname (146 pav.)

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}\, y^2 = a^2,$$

arba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Iš čia matome, kad, suspaudę apskritimą skersmens atžvilgiu, gauname elipsę su pusašėmis a ir b.

Uždavinys. Reikia rasti apskritimo $X^2+Y^2=25$ suspaudimo koeficientą, jeigu suspaudus jį ašies Ox atžvilgiu, gaunama elipsė $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

△ Iš elipsės lygties $a=5$, $b=4$. Kadangi $k=\frac{a}{b}$, tai $k=\frac{5}{4}$. ▲

§ 51. HIPERBOLĖ

Su hiperbolėmis skaitytojas jau šiek tiek susipažino, nagrinėdamas atvirkštinio proporcingumo sąryšį, taip pat spręsdamas antrojo laipsnio nelygybes. Taigi skaitytojas jau žino, kad paprasčiausia hiperbolės lygtis yra $y=\frac{k}{x}$. Sprendžiant sudėtingesnius techninius uždavinius, tos lygties nepakanka; pateiksime hiperbolės apibrėžimą ir išvesime paprasčiausią jos lygtį.

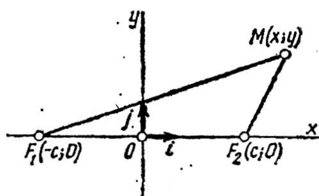
Hiperbole vadinama aibė plokštumos taškų, kurių atstumų nuo dviejų duotųjų tos pačios plokštumos taškų skirtumo absoliutiniai didumai yra lygūs.

Duotieji taškai vadinami hiperbolės *židiniais,* o atstumas tarp jų – *atstumu tarp židinių*. Židiniai žymimi F_1 ir F_2.

Sakykime, plokštumoje duoti židiniai F_1 ir F_2, o M yra bet kuris hiperbolei priklausantis taškas (147 pav.). Taško M atstumas nuo židinio F_1 ir nuo F_2 vadinamas *židininiu spinduliu* ir žymimas atitinkamai r_1 ir r_2: $r_1=|F_1M|$ ir $r_2=|F_2M|$.



147 pav.



148 pav.

Iš hiperbolės apibrėžimo išplaukia, kad jų skirtumo absoliutinis didumas yra pastovus ir, pažymėjus jį $2a$,

$$||F_1M|-|F_2M||=2a. \quad (1')$$

(1′) lygybė ir yra hiperbolės lygtis. Tą lygybę išreikšime koordinatėmis.

Parinkime koordinačių sistemą taip, kad abu židiniai būtų ašyje Ox, o ordinačių ašis būtų statmena atkarpai F_1F_2 ir eitų per jos vidurio tašką. Atstumą tarp židinių pažymėkime $2c$. Tada židinių koordinatės bus $F_1(-c;\ 0)$ ir $F_2(c;\ 0)$ (148 pav.).

Sakykime, $M(x;\ y)$ yra bet kuris hiperbolės taškas.

Židininiai spinduliai $r_1 = |F_1M|$ ir $r_2 = |F_2M|$, remiantis atstumo tarp dviejų taškų formule, yra

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \text{ ir } r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \quad (1$$

Remiantis hiperbolės apibrėžimu ir anksčiau įvestu žymėjimu, jų skirtumų absoliutinis didumas yra pastovus, t. y.

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (2$$

Ši lygybė yra būtina ir pakankama sąlyga, kad taškas $M(x; y)$ priklausytų hiperbolei.

Remdamiesi (1) išraiška, (2) sąlygą galime užrašyti šitaip:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a. \quad (3)$$

Gautoji lygybė yra hiperbolės lygtis pasirinktoje koordinačių sistemoje. Tą lygtį galime suprastinti. Tuo tikslu ją užrašome šitaip:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \quad (4)$$

Abi (4) lygybės puses padauginę iš šaknų, esančių kairiojoje jos pusėje, sumos, gausime

$$4cx = \pm 2a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

arba

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2\frac{c}{a}x. \quad (5)$$

Sudėję (4) ir (5) lygybes, gauname

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm\left(a + \frac{c}{a}x\right). \quad (6)$$

Abi (6) lygybės puses keliame kvadratu:

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2.$$

Atskliautę ir suprastinę gausime

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2. \quad (7)$$

Kadangi hiperbolės $a<c$, tai $a^2-c^2<0$. Jeigu pažymėsime $-b^2=a^2-c^2$, tai bus $c^2-a^2=b^2$. Todėl (7) lygtis galėsime užrašyti šitaip:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Tokia hiperbolės lygtis vadinama *kanonine*. Dažnai ją užrašome ir šitaip: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Gautoji (8) lygtis yra (3) hiperbolės lygties išvada. Todėl bet kurio hiperbolės taško M koordinatės x ir y, susietos (3) lygtimi, tenkina (8) lygtį.

Dabar įrodysime atvirkštinį teiginį: bet kuris taškas $N(x;\ y)$, kurio koordinatės tenkina (8) lygtį, priklauso hiperbolei.

Iš (8) lygybės gautą y^2 išraišką įrašome į dešiniąją (1) lygybės pusę ir gauname

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}=\sqrt{c^2-b^2+2cx+\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2}.$$

Kadangi $c^2-a^2=b^2$, tai

$$r_1=\sqrt{a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|.$$

Panašiai randame

$$r_2=\left|a-\frac{c}{a}x\right|.$$

Jeigu atsižvelgsime į tai, kad $c>a>0$ ir $|x|\geqslant a$, tai, kai $x>0$, $a+\frac{c}{a}x>0$ ir $a-\frac{c}{a}x<0$; kai $x<0$, $a+\frac{c}{a}x<0$ ir $a-\frac{c}{a}x>0$.

Vadinasi, taško N koordinatės tenkina lygybes, kai $x>0$, $r_1=a+\frac{c}{a}x$, $r_2=-a+\frac{c}{a}x$, ir, kai $x<0$, $r_1=-a-\frac{c}{a}x$, $r_2=a-\frac{c}{a}x$

Todėl visais atvejais $|r_1-r_2|=2a$, ir taškas N priklauso hiperbolei.

1 uždavinys. Reikia sudaryti lygtį hiperbolės, simetriškos koordinačių ašių atžvilgiu, kai atstumas tarp židinių yra lygus 10, o $\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$.

△ Ieškomosios hiperbolės lygtį galima užrašyti šitaip: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Iš sąlygos $2c=10$ arba $c=5$ ir $\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$ arba $\frac{5}{a}=\frac{5}{4}$; iš čia $a=4$. Hiperbolės $c^2-a^2=b^2$; vadinasi, $5^2-4^2=b^2$ arba $b^2=9$. Taigi ieškomoji lygtis yra

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.\ \blacktriangle$$

§ 52. HIPERBOLĖS FORMOS TYRIMAS, REMIANTIS JOS LYGTIMI

Sakykime, turime hiperbolę, aprašytą kanonine lygtimi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (1)$$

čia $b^2=c^2-a^2$.

1. Hiperbolė neina per koordinačių pradžią, nes taško $O(0;0)$ koordinatės netenkina (1) lygties.

2. Norint rasti (1) hiperbolės susikirtimo su ašimi Ox taškus, reikia spręsti sistemą

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0.$$

Hiperbolės susikirtimo su ašimi Ox taškas turi ordinatę $y=0$ ir kartu priklauso hiperbolei. Įrašę $y=0$ į hiperbolės lygtį, gauname

$$x=\pm a.$$

Taigi (1) hiperbolės susikirtimo su ašimi Ox taškai yra $A(a; 0)$ ir $B(-a; 0)$; jie vadinami *hiperbolės viršūnėmis.*

Norint rasti (1) hiperbolės susikirtimo taškus su ašimi Oy, reikia spręsti sistemą

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x=0.$$

Įrašę $x=0$ į hiperbolės lygtį, gauname $y^2=-b^2$. Tai reiškia, kad sistema realių sprendinių neturi – hiperbolė nekerta ordinačių ašies Oy.

3. Į (1) lygtį įeina tik antrieji kintamųjų x ir y laipsniai. Vadinasi, jeigu taško $N(x; y)$ koordinatės tenkina (1) lygtį, tai tą lygtį tenkina ir taškų $N_1(-x; y)$, $N_2(x; -y)$ ir $N_3(-x; -y)$ koordinatės.

Nesunku pastebėti, kad taškas N_1 yra simetriškas taškui N ordinačių ašies atžvilgiu, taškas N_2 yra simetriškas taškui N abscisių ašies atžvilgiu, o taškas N_3 yra simetriškas taškui N koordinačių pradžios atžvilgiu.

Taigi hiperbolė turi dvi simetrijos ašis.

Simetrijos ašis, kertanti hiperbolę, vadinama *realiąja simetrijos ašimi*; simetrijos ašis, nekertanti hiperbolės, – *menamąja simetrijos ašimi.*

Hiperbolės židiniai F_1 ir F_2 yra realiojoje simetrijos ašyje. Simetrijos ašių susikirtimo taškas vadinamas hiperbolės *centru.*

Jeigu hiperbolė yra aprašyta kanonine lygtimi, tai jos simetrijos ašys sutampa su koordinačių ašimis.

Hiperbolės viršūnes jungianti atkarpa AB, $|AB|=2a$, vadinama *realiąja hiperbolės ašimi.* Skaičius a vadinamas *realiąja pusaše,* o skaičius b – *menamąja pusaše.*

4. Nustatysime hiperbolės taškų išsidėstymo sritį. Iš (1) hiperbolės lygties tiesiogiai išplaukia, kad $|x|\geqslant a$. Tai reiškia, jog $-a\geqslant x$, $x\geqslant a$. Todėl visi hiperbolės taškai, išskyrus viršūnes, yra į dešinę nuo tiesės $x=a$ ir į kairę nuo tiesės $x=-a$, o viršūnės yra tose tiesėse. Vadinasi, hiperbolė susideda iš dviejų dalių: taškai, kurių $x\geqslant a$, sudaro vieną dalį, vadinamą *dešiniąja šaka,* ir taškai, kurių $x\leqslant -a$, sudaro kitą dalį, vadinamą *kairiąja šaka.*

5. Norėdami patikslinti hiperbolės taškų išsidėstymą, išvesime dvi tieses (149 pav.)

$$y=\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x \tag{2}$$

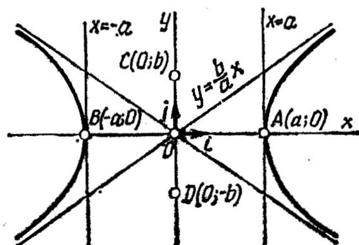
ir jas pavadinsime hiperbolės *asimptotėmis.* Kadangi ir tos tiesės, ir hiperbolė yra simetriškos koordinačių ašių atžvilgiu, tai pakanka išnagrinėti hiperbolės taškų išsidėstymą asimptotės atžvilgiu pirmajame ketvirtyje (150 pav.).

Kad būtų patogiau lyginti hiperbolės ir asimptotės taškų ordinates, asimptotės taškų ordinates žymėsime didžiąja raide Y.

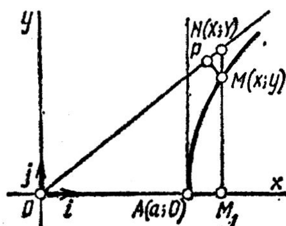
Dabar užrašysime hiperbolės ir asimptotės lygtis:

$$Y=\frac{b}{a}x,\quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (3)$$

Per bet kurį hiperbolės tašką $M(x;\ y)$ nubrėšime statmenis į ašį Ox ir į asimptotę.



149 pav.



150 pav.

Paveiksle matome, kad atkarpa MN yra trikampio MPN įžambinė, o statinio MP ilgis yra taško $M(x;\ y)$ atstumas nuo asimptotės; vadinasi, atstumas MN ne mažesnis už $|MP|$. Aišku, $|MN|=Y-y$. Tada

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})}{a}.$$

Panaikinsime iracionalumą vardiklyje. Padauginę dešiniosios pusės skaitiklį ir vardiklį iš $(x+\sqrt{x^2-a^2})$, gauname

$$Y-y=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}=\frac{b(x^2-x^2+a^2)}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}$$

arba

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Kai $x\to\infty$, dešiniosios pusės trupmenos vardiklis neaprėžtai didėja, o skaitiklis lieka pastovus. Vadinasi,

$$\lim_{x\to\infty}(Y-y)=\lim_{x\to\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0.$$

Dabar galime padaryti išvadą: didėjant kintamajam x, kintamasis y taip neaprėžtai didėja, kad kiekvienas hiperbolės taškas lieka žemiau asimptotės.

Atstumas MN, o juo labiau atstumas MP, didėjant x reikšmėms, nyksta.

Kitaip tariant, (1) hiperbolė, kintamajam x didėjant, neaprėžtai artėja prie asimptotės.

Remiantis simetrija, tos išvados yra teisingos, imant x ir y reikšmes iš visų ketvirčių.

1 uždavinys. Reikia sudaryti hiperbolės $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ asimptočių lygtis.

△ Žinome, kad bet kokios hiperbolės asimptotės aprašomos lygtimis $y=\pm\frac{b}{a}x$; iš sąlygos $a^2=36$, $b^2=25$ arba $a=6$, $b=5$. Taigi asimptočių lygtys yra

$$y=\pm\frac{5}{6}x. \quad \blacktriangle$$

2 uždavinys. Reikia užrašyti hiperbolės lygtį, kai jos asimptočių lygtys yra $3x+2y=0$ ir $3x-2y=0$, o atstumas tarp viršūnių $2a=4$.

△ Žinome, kad hiperbolės asimptočių lygtys yra $y=\pm\frac{b}{a}x$ arba $bx-ay=0$ ir $bx+ay=0$. Iš uždavinio sąlygų $a=2$, $b=3$. Vadinasi, hiperbolės lygtis yra

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1. \quad \blacktriangle$$

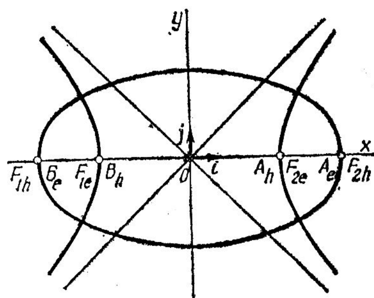
3 uždavinys. Reikia užrašyti lygtį hiperbolės, kurios viršūnės yra elipsės $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ židiniai ir kurios židiniai yra tos elipsės viršūnės. Reikia nubraižyti brėžinį.

△ Norint sudaryti hiperbolės lygtį, reikia rasti a_h ir b_h. Iš elipsės lygties $a_e^2=25$, $a_e=5$; $b_e^2=16$, $b_e=4$.

Imant bet kokią elipsę, bus teisingas sąryšis $a_e^2-c_e^2=b_e^2$; šiuo atveju

$$25-c_e^2=16, \text{ arba}$$

$$c_e^2=9, \text{ arba } c_e=3.$$



151 pav.

Kadangi $a_e>b_e$, tai elipsės židiniai yra ašyje Ox, taigi ir realioji hiperbolės ašis sutampa su abscisių ašimi (Ox). Ieškomosios hiperbolės lygtį galima užrašyti šitaip:

$$\frac{x^2}{a_h^2}-\frac{y^2}{b_h^2}=1.$$

Iš uždavinio sąlygų $a_h=c_e=3$, $c_h=a_e=5$. Imant bet kokią hiperbolę, bus teisingas sąryšis $c_h^2-a_h^2=b_h^2$; nagrinėjamuoju atveju $25-9=b_h^2$ arba $b_h^2=16$. Vadinasi, ieškomosios hiperbolės lygtis yra

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

(151 pav.) . ▲

§ 53. HIPERBOLĖS EKSCENTRICITETAS

Sakykime, duotos dvi hiperbolės, kurių realiosios ašys yra lygios:

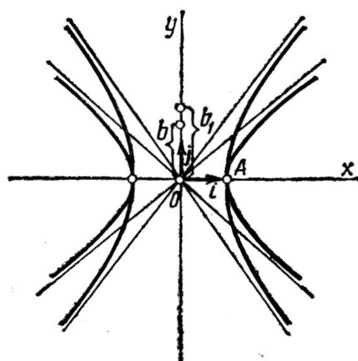
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1 \qquad (1)$$

ir

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1; \qquad (2)$$

čia $b_1>b_2$ (152 pav.).

Nesunku pastebėti, kad hiperbolės forma priklauso nuo santykio $\frac{b}{a}$; juo jis mažesnis, juo labiau hiperbolė prispausta prie ašies Ox, ir atvirkščiai.



152 pav.

Kadangi to santykio vardiklis b savo ruožtu priklauso nuo a ir c, tai praktiškai patogiau hiperbolės (kaip ir elipsės) formą apibūdinti pusės atstumo tarp židinių ir jos realiosios pusašės a santykiu. Tas santykis vadinamas *hiperbolės ekscentricitetu* ir žymimas $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Kadangi hiperbolės $c>a$, tai $\varepsilon>1$. Pavyzdžiui, rasime hiperbolės

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

ekscentricitetą. Iš lygties gauname $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, todėl $\varepsilon=\frac{5}{4}$.

§ 54. HIPERBOLĖS BRĖŽIMAS

Pirmasis būdas. Hiperbolę galima nubrėžti radus jos taškus. Parenkama koordinačių sistema. Iš lygties sudaroma kintamųjų x ir y reikšmių lentelė. Koordinačių plokštumoje pažymimi taškai ir jie sujungiami glodžia linija. Skaitytojas tą būdą jau žino iš VI–VIII klasės algebros kurso.

Antrasis būdas. Hiperbolę galima nubrėžti radus kai kuriuos jos taškus. Sakykime, reikia nubrėžti hiperbolę

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Iš lygties randame ir brėžiame hiperbolės viršūnes $A(a;\ 0)$ ir $B(-a;\ 0)$. Remdamiesi sąryšiu $c^2-a^2=b^2$, randame židinius $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ ir pažymime juos koordinačių plokštumoje (153 pav.). Brėžiame bet kokio spindulio r_2 apskritimą, kurio centras būtų židinyje F_2. Centru lai-

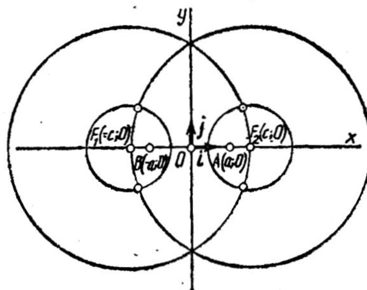
kydami židinį F_1, brėžiame kitą spindulio $r_1=r_2+2a$ apskritimą. Nesunku pastebėti, kad apskritimų susikirtimo taškai priklausys hiperbolei, nes $|r_1-r_2|=2a$.

Jeigu apskritimų centrus sukeisime vietomis, tai gausime dar du hiperbolės taškus. Taigi kiekvieną r_2 reikšmę atitinka keturi hiperbolės taškai. Nubrėžę pakankamai daug hiperbolės taškų, sujungiame juos glodžia linija.

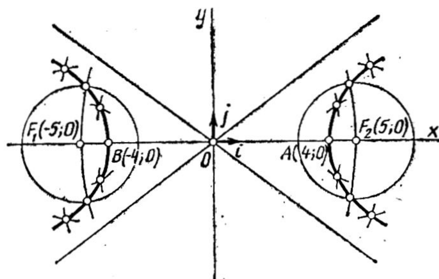
Pavyzdžiui, nubrėšime hiperbolę

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Iš lygties gauname $a=4$, $b=3$; iš sąryšio $c^2-a^2=b^2$ išplaukia, kad $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$. Pasirenkame koordinačių sistemą, pažymime viršūnes $A(4; 0)$, $B(-4; 0)$ ir židinius $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$.



153 pav.



154 pav.

Dabar imame bet kokią židininio spindulio r_2 reikšmę (pavyzdžiui, $r_2=2$) ir apskaičiuojame atitinkamą židininio spindulio $r_1=r_2+2a$ reikšmę (šiuo atveju $r_1=2+2\cdot 4=10$).

Laikydami židinius centrais, brėžiame spindulio r_1 ir r_2 apskritimus. Keturi apskritimų susikirtimo taškai priklauso hiperbolei, nes taip buvo brėžta. Pakartoję tai keletą kartų, gauname dar keletą hiperbolės taškų ketvertų ir brėžiame hiperbolę.

Pastaba. Atkreipkite dėmesį į paveikslą. Hiperbolės taškai yra netoli asimptočių. Ieškant hiperbolės taškų, pakanka rasti susikertančių apskritimų lankus, kurie yra netoli asimptočių.

Vadinasi, nenorint užgriozdinti brėžinio apskritimais, pakanka brėžti nedidelius lankelius prie hiperbolės asimptočių (kaip parodyta 154 pav.).

§ 55. LYGIAAŠĖ HIPERBOLĖ IR JOS LYGTIS. LYGIAAŠĖS HIPERBOLĖS ASIMPTOTINĖ LYGTIS

Jeigu hiperbolės ašys yra lygios ($a=b$), tai hiperbolė vadinama *lygiašone* arba *lygiaaše*. Tokios hiperbolės lygtis yra

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ arba } x^2-y^2=a^2. \tag{1}$$

Iš (1) lygties išplaukia, kad lygiaašė hiperbolė apibūdinama vienu parametru a.

Lygiaašės hiperbolės asimptotės yra

$$y = \pm x. \tag{2}$$

Iš (2) lygčių išplaukia, kad lygiaašės hiperbolės asimptotės eina per koordinačių pradžią, yra statmenos ir sutampa su koordinatinių kampų pusiaukampinėmis.

Kai hiperbolė yra lygiaašė, sąryšis $c^2 = a^2 + b^2$ virsta sąryšiu $c^2 = 2a^2$ arba $c = a\sqrt{2}$. Atstumas tarp židinių yra $2c = 2a\sqrt{2}$.

Lygiaašės hiperbolės ekscentricitetas yra

$$\varepsilon = \sqrt{2}. \tag{3}$$

Šeštoje klasėje su hiperbole susipažinote kaip su funkcijos

$$y = \frac{k}{x} \quad (xy = k), \quad k \neq 0,$$

grafiku. Tada buvo nustatyta, kad toji kreivė susideda iš dviejų šakų, esančių pirmajame bei trečiajame ketvirtyje, kai $k > 0$, ir antrajame bei ketvirtajame ketvirtyje, kai $k < 0$, kad ji yra simetriška koordinatinių kampų pusiaukampinių atžvilgiu.

Primename, kad bet kurio taško padėtis plokštumoje yra nustatyta tik pasirinktos koordinačių sistemos atžvilgiu. Kitoje koordinačių sistemoje to paties taško koordinatės bus kitos.

Dabar panagrinėsime, kaip pasikeis lygiaašės hiperbolės lygtis, jeigu naujosiomis koordinačių ašimis laikysime asimptotes.

Sakykime, duota lygiaašės hiperbolės lygtis

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{4}$$

Aišku, norint naujosiomis ašimis laikyti hiperbolės asimptotes $y = \pm x$, senąsias ašis Ox ir Oy reikia pasukti apie jų bendrą tašką $\mp 45°$ kampu. Pasuksime jas $-45°$ kampu.

Posūkio transformacijos formulės (§ 43)

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

šiuo atveju bus

$$x = x' \cos(-45°) - y' \sin(-45°),$$
$$y = x' \sin(-45°) + y' \cos(-45°),$$

arba, atsižvelgus į tai, kad $\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, o $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \\ y &= x' \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y' \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'). \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Įrašę x ir y reikšmes į duotąją hiperbolės lygtį, gauname

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2-\frac{1}{2}(x'-y')^2=a^2$$

arba

$$x'y'=\frac{a^2}{2}. \qquad (6)$$

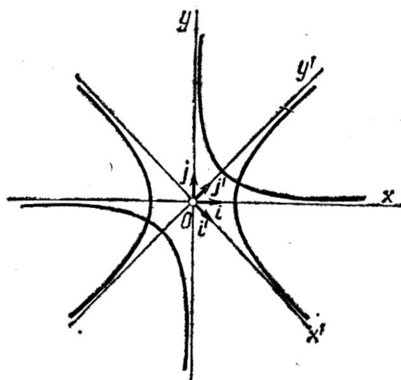
(6) lygtis vadinama *lygiaašės hiperbolės asimptotine lygtimi.*

Senąsias ašis pasukę 45° kampu, gausime lygtį $x'y'=-a^2/2$. Atlikite tai savarankiškai.

Dabar galime paaiškinti, kuo skiriasi hiperbolės $xy=k$ ir $x^2-y^2=a^2$.

Vienoje koordinačių sistemoje tos hiperbolės yra skirtingos. Pirmoji iš jų yra pirmajame ir trečiajame ketvirtyje, ji simetriška koordinatinių kampų pusiaukampinių atžvilgiu, o jos asimptotės sutampa su koordinačių ašimis. Antroji hiperbolė yra simetriška koordinačių ašių atžvilgiu, o jos asimptotės sutampa su koordinatinių kampų pusiaukampinėmis (155 pav.).

Jeigu koordinačių sistemos yra skirtingos, tai (1) ir (2) lygtimis gali būti aprašyta ta pati hiperbolė. Taip bus tada, kai: a) sistemos turės bendrą koordinačių pradžios tašką ($O=O'$); b) ašys Ox ir $O'x'$ sudarys 45° kampą.



155 pav.

1 uždavinys. Duota hiperbolė $xy=2$. Reikia užrašyti jos kanoninę lygtį.

△ Koordinačių ašis pasukę 45° kampu, o koordinačių pradžią palikę tą pačią, remdamiesi formulėmis

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),$$

gauname

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=2 \text{ arba } (x')^2-(y')^2=4. \ ▲$$

2 uždavinys. Lygiaašė hiperbolė aprašyta kanonine lygtimi $x^2-y^2=18$. Reikia užrašyti jos asimptotinę lygtį.

△ Koordinačių ašis pasuksime −45° kampu, palikdami tą patį koordinačių pradžios tašką, ir taikysime (5′) formules

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'), \quad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y').$$

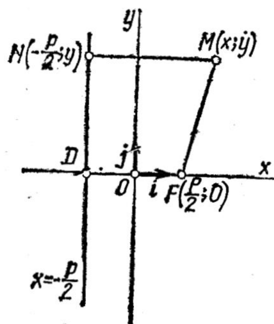
Įrašę į duotąją hiperbolės lygtį x ir y išraiškas, gauname

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2-\frac{1}{2}(x'-y')^2=18 \text{ arba } x'y'=9. \ ▲$$

§ 56. PARABOLĖ

Parabole vadinama aibė plokštumos taškų, kurių atstumas nuo duotojo taško lygus atstumui iki duotosios tiesės, neinančios per tą duotąjį tašką.

Duotasis taškas vadinamas parabolės *židiniu* ir žymimas raide F, o duotoji tiesė vadinama *direktrise* ir žymima raide d. Atstumas nuo židinio iki direktrisės vadinamas parabolės *židinio parametru* ir žymimas raide p.



156 pav.

Norėdami gauti paprastesnę parabolės lygties išraišką, koordinačių sistemą parinkime šitaip: abscisių ašį (Ox) brėžkime per židinį F statmenai direktrisei d ir raide D pažymėkime abscisių ašies ir direktrisės susikirtimo tašką.

Koordinačių pradžia imkime atkarpos DF vidurio tašką. Dešininės koordinačių sistemos ašies Ox teigiamąja kryptimi laikykime spindulio OF kryptį (156 pav.). Taip parinktoje koordinačių sistemoje židinio F koordinatės yra $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, o direktrisės lygtis bus $x+\frac{p}{2}=0$.

Sakykime, $M(x;\ y)$ – bet kuris ieškomosios aibės taškas. Iš taško M nubrėžkime statmenį į direktrisę d ir raide N pažymėkime tų tiesių susikirtimo tašką. Tada $|MN|$ bus taško M atstumas nuo direktrisės; vadinasi,

$$|MN|=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Sujunkime taškus M ir F atkarpa ir raskime atstumą tarp jų:

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}. \qquad (1)$$

Taškas M priklauso ieškomajai aibei (parabolei) tada ir tik tada, kai $|MF|=|MN|$ arba

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \qquad (2)$$

Gautoji (2) lygybė yra parabolės lygtis parinktoje koordinačių sistemoje. Suprastinsime tą lygtį. Abi jos puses kelsime kvadratu:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

arba

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

arba galutinai

$$y^2=2px. \qquad (3)$$

Tokia parabolės lygtis vadinama *kanonine*.

Įrodėme, kad bet kurio parabolės taško koordinatės tenkina (3) lygtį, bet neįrodėme atvirkštinio teiginio, t. y. kad (3) lygtis yra parabolės lygtis.

Turime įrodyti štai ką: jeigu taško $M(x;\ y)$ koordinatės tenkina (3) lygtį, tai taškas priklauso parabolei, t. y. taškas yra vienodai nutolęs nuo taško F ir nuo tiesės d (direktrisės).

□ Sakykime,

$$y^2=2px. \qquad (4)$$

Apskaičiuosime taško M atstumą nuo židinio F. Į dešiniąją (1) lygybės pusę įrašysime y^2 išraišką ((4) lygybė):

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$|MF|=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

t. y. $|MF|$ lygu taško M atstumui iki direktrisės, o tai reiškia, kad taškas M priklauso parabolei. ■

§ 57. PARABOLĖS LYGTIES TYRIMAS

Tirsime parabolės formą ir padėtį, naudodamiesi paprasčiausia (kanonine) jos lygtimi.

1. Parabolės $y^2=2px$ lygtyje nėra laisvojo nario. Vadinasi, parabolė eina per koordinačių pradžią (pradžios taško $O\ (0;0)$ koordinatės tenkina jos lygtį).

2. Į lygtį įeina tik antrasis kintamojo y laipsnis. Vadinasi, jeigu taško $M(x;\ y)$ koordinatės tenkina parabolės lygtį, tai ją tenkina ir taško $M(x;\ -y)$ koordinatės. Todėl parabolė yra simetriška abscisių ašies (Ox) atžvilgiu.

3. Išspręsime parabolės lygtį kintamojo x atžvilgiu:

$$x=\frac{y^2}{2p}. \qquad (1)$$

Vadinasi, visų parabolės taškų abscisės yra neneigiamos. Kadangi parabolės parametras $p>0$, o židinio koordinatės $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, tai visi parabolės taškai, išskyrus jos viršūnę, yra toje pačioje ašies Oy pusėje, kaip ir židinys (į dešinę nuo ašies Oy).

4. Iš parabolės lygties išplaukia, jog, abscisei x didėjant nuo nulio iki begalybės, ordinatė y taip pat didėja nuo nulio iki begalybės (157 pav.).

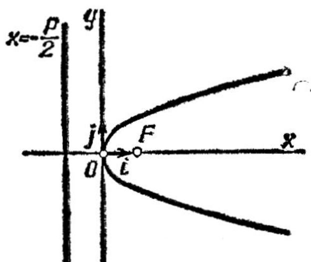
5. Jeigu parabolės židinys yra į kairę nuo ašies Oy, t. y. jo koordinatės $F\left(-\frac{p}{2};\ 0\right)$, tai parabolės lygtis yra

$$y^2=-2px. \qquad (2)$$

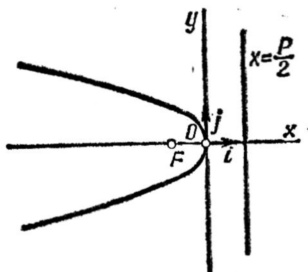
Išsprendę (2) lygtį kintamojo x atžvilgiu, gauname

$$x = -\frac{y^2}{2p}. \qquad (3)$$

Iš (3) lygties išplaukia, kad visų parabolės taškų abscisės yra neteigiamos. Kadangi parabolės parametras $p>0$, o židinio koordinatės $F\left(-\frac{p}{2};\ 0\right)$, tai visi parabolės taškai, išskyrus viršūnę, yra toje pačioje ašies Oy pusėje, kaip ir židinys (į kairę nuo ašies Oy) (158 pav.).



157 pav.

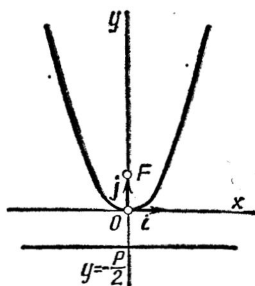


158 pav.

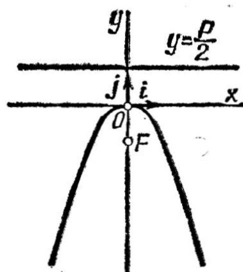
6. Jeigu parabolės židinys yra ašies Oy taškas $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$, tai šiuo atveju parabolės lygtis yra

$$x^2 = 2py. \qquad (4)$$

Panašiai samprotaujant įrodoma, kad visi (4) parabolės taškai, išskyrus viršūnę, yra virš ašies Ox (159 pav.).



159 pav.



160 pav.

7. Jeigu parabolės židinys yra ordinačių ašies taškas $F\left(0;\ -\frac{p}{2}\right)$, tai parabolės lygtis yra

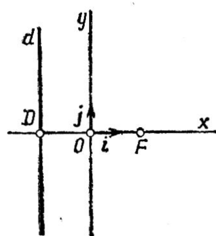
$$x^2 = -2py. \qquad (5)$$

Šiuo atveju visi parabolės taškai, išskyrus viršūnę, yra žemiau ašies Ox (160 pav.).

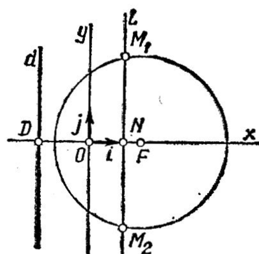
§ 58. PARABOLĖS BRĖŽIMAS

Parabolės forma ir padėtis yra visiškai nusakyta, jeigu nurodyta direktrisė d ir židinys F.

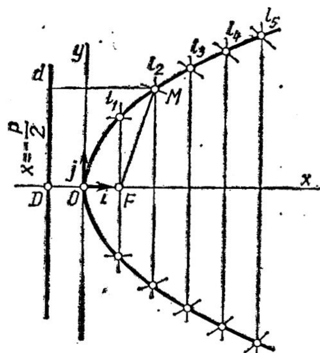
Sakykime, F yra židinys ir d – parabolės direktrisė. Per židinį statmenai direktrisei brėžiame parabolės ašį (161 pav.). Parabolės ašies ir direktrisės susikirtimo tašką žymime raide D. Akivaizdu, kad atkarpos DF vidurio taškas O priklauso parabolei ir yra jos viršūnė. Per bet kurį spindulio OF tašką N brėžiame tiesę l, statmeną parabolės ašiai. Randame du taš-



161 pav.



162 pav.



163 pav.

kus, kuriuose ta tiesė kertasi su apskritimu, kurio centras sutampa su parabolės židiniu, o spindulys lygus atstumui tarp direktrisės d ir tiesės l. Aišku, rastieji taškai M_1 ir M_2 priklauso parabolei (162 pav.). Jeigu nubrėšime n tiesių, statmenų parabolės ašiai, ir rasime, kokiuose taškuose jos kertasi su apskritimais, kurių centrai yra parabolės židinyje, o spinduliai lygūs atstumui tarp direktrisės ir atitinkamos tiesės (163 pav.), tai gausime dar n parabolės taškų porų. Gautuosius taškus sujungsime glodžia linija.

§ 59. PARABOLĖS LYGIAGRETUSIS POSTŪMIS

Sakykime, duota parabolės kanoninė lygtis

$$x^2=2py. \tag{1}$$

Žinome, kad šiuo atveju parabolės ašis sutampa su ašimi Oy, viršūnė su koordinačių pradžia, o židinys yra taškas $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$.

Panagrinėsime, kaip pasikeis (1) parabolės lygtis, perėjus prie kitos (naujos) koordinačių sistemos, kurios pradžios taško O' koordinatės senojoje koordinačių sistemoje yra $(a; b)$, o ašys lygiagrečios senosioms ašims. Tuo tikslu taikysime lygiagrečiojo postūmio transformacijos formules

$$\left.\begin{aligned} x&=x'+a, \\ y&=y'+b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Kintamųjų x ir y išraiškas ((2) formulės) įrašę į (1) lygtį, gauname

$$(x'+a)^2=2p(y'+b) \text{ arba } (x')^2+2ax'+a^2=2py'+2pb.$$

Išsprendę tą lygtį kintamojo y' atžvilgiu, gauname

$$y'=\frac{1}{2p}(x')^2+\frac{a}{p}x'+\frac{a^2}{2p}-b. \quad (3)$$

Pažymime

$$\frac{1}{2p}=m, \quad \frac{a}{p}=n, \quad \frac{a^2}{2p}-b=l. \quad (4)$$

Dabar (3) lygtį galime užrašyti šitaip:

$$y'=m(x')^2+nx'+l. \quad (5)$$

Ta parabolės lygtis skaitytojui gerai žinoma kaip kvadratinio trinario išraiška.

Uždavinys. Duota parabolės lygtis

$$x^2=3y. \quad (6)$$

Reikia užrašyti tos pačios parabolės lygtį naujojoje koordinačių sistemoje, kai naujojo pradžios taško koordinatės yra $O'(2;5)$, o naujosios ašys $O'x'$ ir $O'y'$ lygiagrečios senosioms ašims Ox ir Oy.

△ Įrašę (2) kintamųjų x ir y išraiškas į (6) lygtį (imdami $a=2$, $b=5$), gauname $(x'+2)^2=3(y'+5)$ arba $(x')^2+4x'+4=3y'+15$; galutinai

$$y'=\frac{1}{3}(x')^2+\frac{4}{3}x'-\frac{11}{3}.$$

Šį uždavinį galima spręsti ir kitaip. Iš (4) formulių apskaičiuojame m, n, l: $m=\frac{1}{2p}=\frac{1}{3}$ (nes $2p=3$), $n=\frac{a}{p}=2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$ ir $l=\frac{a^2}{2p}-b=\frac{2^2}{3}-5=-\frac{11}{3}$.

Įrašę m, n ir l reikšmes į (5) lygtį, gauname

$$y'=\frac{1}{3}(x')^2+\frac{4}{3}x'-\frac{11}{3}. \quad ▲$$

Suformuluosime atvirkštinį uždavinį. Duota dviejų kintamųjų antrojo laipsnio lygtis

$$y'=m(x')^2+nx'+l. \quad (7)$$

Reikia rasti paprasčiausią tos parabolės lygtį, t. y.

$$x^2=2py. \quad (8)$$

Tuo tikslu reikia nustatyti parametro p reikšmę ir naujojo pradžios taško O koordinates $(a;b)$. Jas randame iš (4) formulių:

$$p=\frac{1}{2m}, \quad a=\frac{n}{2m} \text{ ir } b=\frac{n^2}{4m}-l. \quad (9)$$

Uždavinys. Duota parabolė, aprašyta lygtimi

$$y'=2(x')^2+6x+7.$$

Reikia užrašyti jos kanoninę lygtį ir rasti naujojo pradžios taško koordinates.

△ Iš duotosios parabolės lygties $m=2$, $n=6$ ir $l=7$. Įrašę tas reikšmes į (9) formules, gauname

$$p=\frac{1}{2m}=\frac{1}{4};\quad a=\frac{n}{2m}=\frac{6}{2\cdot 2}=\frac{3}{2},$$

$$b=\frac{n^2}{4m}=\frac{6^2}{4\cdot 2}-7=-\frac{5}{2}.$$

Taigi parabolės kanoninė lygtis yra $x^2=\frac{1}{2}y$, o naujojo pradžios taško koordinatės O (1,5; −2,5). ▲

§ 60. ANTROSIOS EILĖS KREIVĖS LYGTIS — ATSKIRAS DVIEJŲ KINTAMŲJŲ ANTROJO LAIPSNIO LYGTIES ATVEJIS

Sakykime, duota bendroji dviejų kintamųjų antrojo laipsnio lygtis

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

kurioje A ir C kartu nelygūs nuliui.

Nesunku pastebėti, kad anksčiau išnagrinėtos antrosios eilės kreivių kanoninės lygtys yra atskiri (1) lygties atvejai.

1. Kai $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=0$, $E=0$ ir $F=-R^2$, (1) lygtis virsta šitokia:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Tai yra apskritimo lygtis.

2. Kai $A=\frac{1}{a^2}$, $B=0$, $C=\frac{1}{b^2}$, $D=0$, $E=0$ ir $F=-1$, (1) lygtis bus

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

t. y. elipsės lygtis.

3. Kai $A=\frac{1}{a^2}$, $B=0$, $C=-\frac{1}{b^2}$, $D=0$, $E=0$ ir $F=-1$, (1) lygtis virsta šitokia:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Tai yra hiperbolės lygtis.

4. Kai $A=0$, $B=0$, $C=1$, $D=-p$, $E=0$ ir $F=0$, (1) lygtis yra parabolės lygtis

$$y^2=2px.$$

1. Užrašykite lygtį apskritimo, kurio centras sutampa su koordinačių sistemos pradžia, o spindulys $R=4$.

2. Apskritimas, kurio centras sutampa su koordinačių sistemos pradžia, liečia tiesę $x=3$. Sudarykite jo lygtį.

3. Apskritimas, kurio centras yra abscisių ašyje, liečia tieses $x=8$ ir $y=3$. Užrašykite jo lygtį.

4. Sudarykite apskritimo lygtį, jeigu žinoma, kad jis liečia abscisių ašį bei tieses $x=-1$ ir $x=5$.

5. Užrašykite lygtį apskritimo, einanio per tašką $M(2; 1)$ ir liečiančio koordinačių ašis.

6. Apskritimas, kurio centras yra taške $C(2; -1)$, eina per tašką $N(6; 2)$. Užrašykite jo lygtį.

7. Sudarykite lygtį apskritimo, einančio per tris taškus $M_1(0; 0)$, $M_2(3; 0)$ ir $M_3(0; 4)$.

8. Raskite tiesės $y-7x-12=0$ ir apskritimo $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ susikirtimo taškų koordinates.

9. Apskritimas, kurio centras yra taškas $C(3; 7)$, liečia ašį Ox. Užrašykite jo lygtį.

10. Apskritimas, kurio centras yra tiesių

$$2x+3y-13=0, \quad x+y-5=0$$

susikirtimo taškas, liečia ordinačių ašį. Sudarykite jo lygtį.

11. Apskritimas, kurio centras yra taškas $C(-1; -1)$, liečia tiesę AB; čia $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$. Užrašykite jo lygtį.

12. Kokia kreivė aprašoma kiekviena iš duotųjų lygčių:

1) $(x-3)^2+(y+5)^2=25$;
2) $(x+5)^2+(y-4)^2=0$;
3) $x^2-2x+4y+y^2-20=0$;
4) $(x-3)^2+y^2=3$;
5) $x^2+(y-2)^2=7$;
6) $x^2+y^2+y=0$?

13. Nustatykite taško $M(-2; 1)$ padėtį kiekvieno apskritimo atžvilgiu (viduje, išorėje arba priklauso apskritimui):

1) $x^2+y^2=2$;
2) $x^2+y^2-5=0$;
3) $x^2+y^2=25$;
4) $x^2+y^2-8x-4y=5$;
5) $x^2+y^2+6x-8y=0$;
6) $x^2+y^2=0{,}01$.

14. Raskite trumpiausią taško $A(8; -6)$ atstumą iki apskritimo $x^2+y^2-4=0$.

15. Užrašykite apskritimo $x^2+y^2=25$ skersmens, statmeno tiesei $4x+3y-25=0$, lygtį.

16. Užrašykite apskritimų $(x-2)^2+y^2=16$ ir $x^2+(y-3)^2=9$ centrų tiesės lygtį.

17. Sudarykite lygtį apskritimo, simetriško apskritimui $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ tiesės $y=x-3$ atžvilgiu.

18. Duoti taškai $M_1(2; 3)$ ir $M_2(10; 9)$. Užrašykite lygtį apskritimo, kurio skersmuo būtų atkarpa M_1M_2.

19. Apskritimas liečia ordinačių ašį koordinačių sistemos pradžioje ir eina per tašką $M_1(-4; 0)$. Užrašykite jo lygtį ir raskite jo susikirtimo taškus su koordinatinių kampų pusiaukampinėmis.

20. Trikampio kraštinių lygtys yra $x-3y+1=0$, $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$. Sudarykite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo lygtį.

21. Apskritimas, kurio centras yra tiesėje $x+y+3=0$, eina per taškus $M(4; 1)$ ir $N(0; 5)$. Užrašykite jo lygtį.

22. Nustatykite tiesės padėtį apskritimo atžvilgiu (kerta apskritimą, liečia jį ar yra apskritimo išorėje), jeigu tiesė ir apskritimas aprašyti šiomis lygtimis:

1) $2x-y-3=0$ ir $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

2) $x-2y-1=0$ ir $(x-4)^2+(y+1)^2=5$;
3) $x+3y+10=0$ ir $x^2+y^2=1$.

23. Užrašykite lygtį elipsės, simetriškos koordinačių ašių atžvilgiu, jeigu jos židiniai yra ašyje Ox ir: 1) jos pusašės $a=7$, $b=3$; 2) didžioji pusašė $a=4$, o mažoji $b=3$; 3) didžioji pusašė $a=5$, o atstumas tarp židinių $2c=6$; 4) mažoji pusašė $b=4$, o atstumas tarp židinių $2c=6$; 5) didžioji pusašė $a=5$, o ekscentricitetas $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

24. Raskite lygtį elipsės, simetriškos koordinačių ašių atžvilgiu, jeigu jos židiniai yra ašyje Oy ir: 1) jos pusašės $a=3$, $b=4$; 2) jos didžioji pusašė $b=6$, o mažoji $a=3$; 3) jos didžioji pusašė $b=8$, o atstumas tarp židinių $2c=12$; 4) jos mažoji pusašė $a=4$, o ekscentricitetas $\varepsilon=\frac{3}{5}$; 5) jos mažoji pusašė $a=6$, o atstumas tarp židinių $2c=16$.

25. Raskite duotųjų elipsių pusašes bei židinių ir viršūnių koordinates:

1) $9x^2+16y^2=144$; 2) $16x^2+9y^2-144=0$;
3) $4x^2+y^2=9$; 4) $x^2+9y^2=4$;
5) $4x^2+9y^2=1$; 6) $0{,}25x^2+y^2=1$.

26. Į apskritimą $x^2+y^2=100$ įbrėžta elipsė liečia jį didžiosios ašies galuose. Užrašykite elipsės lygtį, jeigu $a=2b$.

27. Duota elipsė $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Raskite jos didžiąją bei mažąją pusašes, židinių koordinates, atstumą tarp židinių, viršūnių koordinates ir ekscentricitetą.

28. Įrodykite, kad kiekvienas elipsės

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

vidaus taškas $P(x_1; y_1)$ tenkina nelygybę

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1,$$

o kiekvienas išorės taškas $Q(x_2; y_2)$ – nelygybę

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}>1.$$

29. Rombo kraštinė lygi 10. Per dvi priešingas jo viršūnes eina elipsė, kurios židiniai sutampa su kitomis dviem rombo viršūnėmis. Laikydami rombo įstrižaines koordinačių ašimis, užrašykite elipsės lygtį, jeigu židinio koordinatės yra $F_1(8; 0)$.

30. Raskite ilgį elipsės $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ stygos, dalijančios kampą tarp ašių pusiau.

31. Duotas apskritimas $x^2+y^2=36$. Jo ordinatės sumažintos 3 kartus. Užrašykite gautosios kreivės lygtį.

32. Sudarykite lygtį elipsės, kurios atstumai tarp židinio ir didžiosios ašies galų lygūs 1 ir 9.

33. Duota elipsė $25x^2+49y^2=1225$. Raskite ašių ilgius, židinių koordinates ir ekscentricitetą.

34. Elipsės pusašių suma lygi 8, o atstumas tarp židinių taip pat lygus 8. Židiniai yra ordinačių ašyje. Sudarykite tos elipsės lygtį.

35. Duota elipsė $4x^2+25y^2-100=0$. Raskite taškų, kurių abscisės lygios -3, ordinates.

36. Apskaičiuokite plotą keturkampio, kurio dvi viršūnės yra elipsės $9x^2+25y^2-225=0$ židiniai, o kitos dvi sutampa su mažosios ašies galais.

37. Elipsė, kurios židiniai yra abscisių ašyje ir yra simetriški koordinačių pradžios taško atžvilgiu, eina per tašką $M_1(2; -2)$; jos didžioji pusašė yra $a=4$. Užrašykite tos elipsės lygtį.

38. Duota elipsė $15x^2+25y^2-375=0$. Per židinį nubrėžtas statmuo į didžiąją ašį. Raskite atstumą nuo jo susikirtimo su elipse taškų iki židinių.

39. Duota elipsė $16x^2+7y^2-112=0$. Raskite elipsės taškų, kurių atstumas nuo židinių lygus 2,5, koordinates.

40. Elipsės pusašės yra a ir b, centras – taškas $C(x_0; y_0)$, o simetrijos ašys lygiagrečios koordinačių ašims. Ušrašykite tos elipsės lygtį.

41. Elipsė liečia abscisių ašį koordinačių pradžioje, jos centras yra taškas (0; 5), o ekscentricitetas lygus 0,6. Užrašykite elipsės lygtį.

42. Elipsė liečia abscisių ašį taške (5; 0) ir kerta ordinačių ašį taškuose (0; 5) ir (0; 11). Sudarykite elipsės lygtį, jeigu jos ašys lygiagrečios koordinačių ašims.

43. Stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje elipsės lygtis yra $4x^2+9y^2-36=0$. Užrašykite tos elipsės parametrinę lygtį.

44. Parašykite elipsės $36x^2+12y^2-432=0$ liestinės taške (3; −3) lygtį.

45. Raskite tiesės $5x-2y-30=0$ ir elipsės $75x^2+24y^2-1800=0$ lietimosi tašką.

46. Duota elipsė $25x^2+36y^2-900=0$ ir apskritimas $x^2+y^2=R^2$. Raskite jų susikirtimo taškus ir ištirkite, kiek jų bus ir ar jų padėtis priklausys nuo spindulio reikšmės.

47. Apskritimas $(x-5)^2+(y-3)^2=4$ liečia elipsę ir eina per jos židinius. Sudarykite elipsės lygtį, jeigu jos didžioji ašis lygiagreti abscisių ašiai.

48. Užrašykite lygtį hiperbolės, kuri yra simetriška koordinačių ašių atžvilgiu ir kurios židiniai yra ašyje Ox, kai: 1) $a=4$, $b=3$; 2) $2c=16$, $2b=12$; 3) $\varepsilon=1{,}5$, $2c=6$; 4) $2a=16$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$; 5) asimptočių lygtys $y=\pm\frac{3}{2}x$, $2a=4$; 6) $2b=6$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$.

49. Sudarykite lygtį hiperbolės, kuri yra simetriška koordinačių ašių atžvilgiu ir kurios židiniai yra ordinačių ašyje, kai: 1) $a=3$, $b=6$; 2) $2c=10$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$; 3) asimptočių lygtys $y=\pm\frac{12}{5}x$, $2a=48$; 4) $2b=8$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

50. Raskite šių hiperbolių pusašes: 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $16x^2-y^2=1$; 3) $x^2-9y^2=9$; 4) $16x^2-9y^2=1$; 5) $x^2-y^2=4$; 6) $9x^2-16y^2=144$.

51. Duota hiperbolė $9x^2-16y^2-144=0$. Raskite: 1) pusašes a ir b; 2) židinių koordinates; 3) viršūnių koordinates; 4) asimptočių lygtis.

52. Raskite hiperbolės $9x^2-16y^2=-144$: 1) pusašes a ir b; 2) viršūnių koordinates; 3) židinių koordinates; 4) asimptočių lygtis.

53. Duota hiperbolė $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. Naudodamiesi skriestuvu, raskite tos hiperbolės židinius.

54. Hiperbolės židiniai yra elipsės $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$ viršūnėse, o viršūnės – elipsės židiniuose. Už rašykite hiperbolės lygtį.

55. Duota hiperbolė $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$. Užrašykite lygtis lygiagrečių tiesių, ribojančių tą plokštumos dalį, kurioje nėra nė vieno hiperbolės taško, išskyrus viršūnes.

56. Duota hiperbolės lygtis $9x^2-16y^2=144$. Raskite jos židinių bei viršūnių koordinates, ekscentricitetą ir asimptočių lygtis. Pateikite brėžinį.

57. Hiperbolės realioji pusašė lygi 5, o ekscentricitetas $\varepsilon=1{,}4$. Užrašykite jos lygtį.

58. Kairysis hiperbolės židinys yra taške $B(-5; 0)$, o kairioji jos viršūnė – taške $A(-3; 0)$. Užrašykite hiperbolės lygtį.

59. Hiperbolės asimptočių lygtys yra $y=\pm 2x$, atstumas tarp židinių $2c=10$, o simetrijos ašys sutampa su koordinačių ašimis. Sudarykite hiperbolės lygtį.

60. Nustatykite, kokia sąlyga turi būti išpildyta, kad hiperbolės

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

asimptotės būtų statmenos.

61. Duota hiperbolė

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Raskite jos susikirtimo taškus su tiesėmis: a) $x-y+1=0$; b) $x-4y-8=0$; c) $5x-4y-16=0$. Nubraižykite brėžinį.

62. Duotas apskritimas $(x-a)^2+y^2=1$ ir hiperbolė $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$. Raskite jų susikirtimo taškus. Nustatykite, kaip jų skaičius ir padėtis priklausys nuo parametro a reikšmių.

63. Užrašykite hiperbolės kanoninę lygtį, jeigu vienos jos viršūnės atstumas nuo židinių atitinkamai lygus 9 ir 1.

64. Hiperbolės asimptočių lygtys yra $y=\pm\frac{1}{2}x$, o atstumas tarp židinių $2c=10$. Užrašykite hiperbolės lygtį.

65. Duota hiperbolė $16x^2-9y^2-144=0$. Raskite koordinates hiperbolės taškų, esančių nuo kairiojo židinio 7 vienetų atstumu.

66. Duota hiperbolės lygtis

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Naudodamiesi vien tik skriestuvu (neskaičiuodami), nubrėžkite keletą tos hiperbolės taškų.

67. Raskite lygiaašės hiperbolės ekscentricitetą.

68. Hiperbolės židiniai sutampa su elipsės $9x^2+25y^2-225=0$ židiniais. Užrašykite hiperbolės lygtį, kai jos ekscentricitetas $\varepsilon=2$.

69. Hiperbolės pusašės yra $a=5$, $b=4$, centro koordinatės – (3; 2), o ašis lygiagreti abscisių ašiai. Užrašykite hiperbolės lygtį.

70. Hiperbolės židinių koordinatės yra (–10; 2) ir (16; 2), atstumas tarp viršūnių lygus 24. Užrašykite hiperbolės lygtį.

71. Sudarykite lygtį parabolės, kurios viršūnė yra koordinačių sistemos pradžioje, kai: 1) parabolė yra viršutinėje pusplokštumėje, simetriška ordinačių ašies atžvilgiu ir $p=4$; 2) parabolė yra apatinėje pusplokštumėje, simetriška ordinačių ašies atžvilgiu ir $p=6$; 3) parabolė yra dešiniojoje pusplokštumėje, simetriška abscisių ašies atžvilgiu ir $p=3$; 4) parabolė yra kairiojoje pusplokštumėje, simetriška abscisių ašies atžvilgiu ir $p=5$.

72. Parabolė eina per koordinačių pradžią, yra simetriška ordinačių ašies atžvilgiu, o jos židinio koordinatės – $F(0; -3)$. Užrašykite parabolės lygtį.

73. Duotos parabolės židinio koordinatės $F(-6; 0)$ ir direktrisės lygtis $x-6=0$. Sudarykite parabolės lygtį.

74. Užrašykite parabolės lygtį, jeigu jos židinio koordinatės yra (0; 4), o direktrisės lygtis $y+4=0$.

75. Parabolė eina per koordinačių pradžią ir tašką M (3; 6), o jos židinys yra ordinačių ašyje. Užrašykite parabolės lygtį.

76. Raskite šių parabolių viršūnių ir židinių koordinates: 1) $y^2=20x$; 2) $x^2=12y$; 3) $y^2=-10x$; 4) $y^2=x$; 5) $x^2=-4y$; 6) $x^2=y$.

77. Viename brėžinyje pavaizduokite šias paraboles: $x^2=0{,}5y$, $x^2=y$, $x^2=2y$.

78. Parabolės židinys yra taškas $F(0; 0{,}25)$, jos direktrisė lygiagreti abscisių ašiai ir ordinačių ašyje atkerta atkarpą, kurios ilgis lygus 0,25. Sudarykite parabolės lygtį.

79. Parabolė eina per taškus A (0; 6) ir B (0; –6), yra simetriška abscisių ašies atžvilgiu ir toje ašyje atkerta 4 vienetų ilgio atkarpą (į dešinę nuo pradžios). Užrašykite parabolės lygtį ir nubraižykite tą parabolę.

80. Parabolės židinys yra tiesės $2x-5y-8=0$ susikirtimo su abscisių ašimi taškas. Sudarykite paprasčiausią parabolės lygtį ir nubraižykite tą parabolę.

81. Užrašykite lygtį parabolės, kuri eitų per taškus (0; 0) bei (5; 3) ir būtų simetriška abscisių ašies atžvilgiu.

82. Duota aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo taško (2; 0) ir nuo tiesės $x+2=0$. Sudarykite tos aibės lygtį. Raskite jos susikirtimo su abscisių ašimi taškus. Nubrėžkite tą liniją.

83. Sudarykite plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo koordinačių pradžios ir nuo tiesės $x=6$, aibės lygtį. Raskite gautosios linijos susikirtimo su koordinačių ašimis taškus. Pavaizduokite tą liniją grafiškai.

84. Sudarykite lygtį parabolės, kuri eina per tašką $N(9;\ 6)$ ir kurios viršūnė yra koordinačių sistemos pradžioje; raskite kampą α tarp taško N židininio spindulio vektoriaus ir abscisių ašies.

85. Parabolės viršūnė yra taškas $A(-4;\ 5)$, o židinys – taškas $B(-2;\ 5)$. Užrašykite parabolės, jos ašies ir direktrisės lygtis.

86. Duotos parabolės židinio koordinatės $(-3;\ -4)$ ir jos direktrisės lygtis $x+1=0$. Užrašykite parabolės lygtį ir raskite jos susikirtimo taškus su koordinačių ašimis.

87. Raskite parabolės $y=0{,}25x^2$ ir tiesių 1) $x=y$; 2) $x=-y$; 3) $x-2y+4=0$; 4) $5x-2y-8=0$ susikirtimo taškus. Nubraižykite brėžinį.

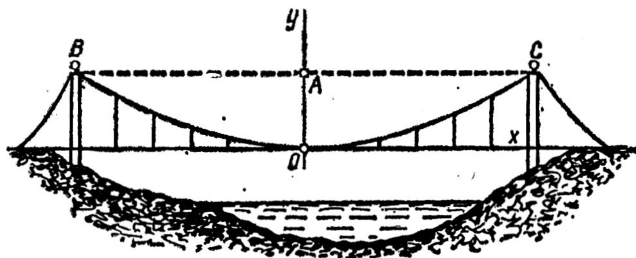
88. Raskite koordinates parabolės $x^2=8y$ taškų, kurių atstumas nuo direktrisės lygus 4.

89. Duota parabolė $y^2=5x$. Raskite parabolės tašką, kurio židininis spindulys lygus 4.

90. Parabolė eina per tašką, priklausantį tiesei $y=x$ ir apskritimui $x^2+y^2-10y=0$, ir yra simetriška ordinačių ašies atžvilgiu. Užrašykite parabolės ir jos direktrisės lygtis. Nubrėžkite apskritimą, tiesę ir parabolę.

91. Tiesė $y=1$ yra parabolės direktrisė, o taškas $(2;9)$ – parabolės židinys. Raskite stygos, nubrėžtos per židinį lygiagrečiai direktrisei, galinių taškų koordinates. Nubrėžkite parabolę ir tą jos stygą.

92. Užrašykite parabolės $y^2=6x$ liestinės taške $N(6;\ 6)$ lygtį.



164 pav.

93. Kabančiojo tilto lynas yra parabolės formos (164 pav.). Lyno įlinkis $|OA|=10$, o tilto ilgis $|BC|=60$. Sudarykite parabolės lygtį paveiksle nurodytų koordinačių ašių atžvilgiu.

94. Apskritimas, kurio centras yra parabolės $y^2=8x$ židinys, liečia tos parabolės direktrisę. Raskite parabolės ir apskritimo susikirtimo taškų koordinates; nubraižykite brėžinį.

2 DALIS I SKYRIUS

Tiesės ir plokštumos erdvėje

§ 1. TRIJŲ VEKTORIŲ MIŠRIOJI SANDAUGA

Trijų vektorių **a**, **b**, **c** *mišriąja sandauga* vadinamas skaičius, lygus vektorių [**a**; **b**] ir **c** skaliarinei sandaugai.

Vektorių **a**, **b** ir **c** mišrioji sandauga žymima šitaip: (**a**; **b**; **c**).

Aiškinant geometriškai, trijų nekomplanarių vektorių **a**, **b** ir **c** mišriosios sandaugos modulis yra dauginamųjų vektorių nustatyto gretasienio tūris. (**a**; **b**; **c**)>0, kai **a**, **b**, **c** yra dešinysis vektorių trejetas (I d., § 26); (**a**; **b**; **c**)<0, kai tas trejetas yra kairysis.

□ Iš tikrųjų, remdamiesi vektorinės ir skaliarinės sandaugos apibrėžimu, randame

$$|(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c})| = |[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\widehat{\mathbf{a};\ \mathbf{b}})\cdot|\mathbf{c}|\cdot|\cos(\widehat{[\mathbf{a};\ \mathbf{b}];\ \mathbf{c}})|.$$

Išnagrinėkime vektorių **a**, **b** ir **c** nustatytą gretasienį (1 pav.).

Kampą tarp vektorių **a** ir **b** pažymėkime raide φ, kampą tarp vektorių **c** ir [**a**; **b**] – ψ, gretasienio tūrį – V.

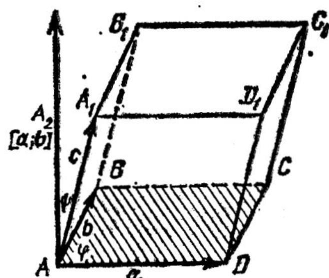
Tada $V=S_{ABCD}\cdot h$; čia S_{ABCD} – gretasienio pagrindo plotas, h – jo aukštinė. Tačiau

$$S_{ABCD}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\varphi,$$

$$h=|AA_2|=|\mathbf{c}|\cdot|\cos\psi|.$$

Taigi

$$V=|(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c})|. \qquad (1)$$



1 pav.

Mišriosios sandaugos ženklas sutampa su cos ψ ženklu. Todėl mišrioji sandauga yra teigiama, kai vektorius **c** nukreiptas į tą pačią vektorių **a** ir **b** plokštumos pusę, kaip ir vektorius [**a**; **b**], t. y. kai **a**, **b**, **c** yra dešinysis vektorių trejetas. Mišrioji sandauga yra neigiama, kai vektoriai **c** ir [**a**; **b**] nukreipti į priešingas tos plokštumos puses, t. y. kai **a**, **b**, **c** yra kairysis trejetas. ■

Išnagrinėsime kai kurias mišriosios sandaugos savybes.

1. Kad vektoriai **a**, **b** ir **c** būtų komplanarūs, būtina ir pakanka, kad jų mišrioji sandauga būtų lygi nuliui.

□ Būtinumas. Sakykime, vektoriai **a**, **b**, **c** yra komplanarūs. Atidėjus nuo vieno taško, jie bus vienoje plokštumoje (I d., § 12). Bet tada jų nustatyto gretasienio tūris lygus nuliui. Vadinasi, (**a**; **b**; **c**)=0.

Pakankamumas. Tarkime, kad $(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c})=0$, o vektoriai **a**, **b** ir **c** yra nekomplanarūs. Sukonstruokime tų vektorių gretasienį. Remiantis mišriosios sandaugos geometriniu aiškinimu, $|(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c})|=V\neq 0$, bet tai prieštarauja sąlygai. ■

2. Kad ir kokie būtų vektoriai **a**, **b** ir **c**,

$$[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b};\ \mathbf{c}].$$

□ Remiantis skaliarinės daugybos savybe (I d., § 20),

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b};\ \mathbf{c}]=[\mathbf{b};\ \mathbf{c}]\cdot\mathbf{a}.$$

Iš mišriosios sandaugos geometrinio aiškinimo išplaukia

$$|[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}|=|[\mathbf{b};\ \mathbf{c}]\cdot\mathbf{a}|=V,$$

nes nagrinėjamas tas pats gretasienis.

Vektorių trejetai **a**, **b**, **c** ir **b**, **c**, **a** yra arba abu dešinieji, arba abu kairieji, todėl $[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}$ ir $[\mathbf{b};\ \mathbf{c}]\cdot\mathbf{a}$ ženklai sutampa.

Taigi $[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}=[\mathbf{b};\ \mathbf{c}]\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b};\ \mathbf{c}]$. ■

3. Vektorių **a**, **b** ir **c**, duotų koordinatėmis $\mathbf{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\mathbf{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$ stačiakampėje dekartinėje bazėje, mišrioji sandauga išreiškiama formule

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

□ Koordinatėmis duotų vektorių **a** ir **b** vektorinė sandauga išreiškiama šitaip (I d., § 27):

$$[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]=(y_1z_2-z_1y_2)\,\mathbf{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\,\mathbf{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\,\mathbf{k},$$

arba determinantais

$$[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Koordinatėmis išreikškime vektorių $[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]$ ir **c** skaliarinę sandaugą:

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c})=[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]\cdot\mathbf{c}=$$

$$=x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$ ■

Dabar pirmąją iš išnagrinėtųjų vektorių mišriosios sandaugos savybių galima suformuluoti šitaip.

Kad vektoriai $\mathbf{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ir $\mathbf{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$ būtų komplanarūs, būtina ir pakanka, kad būtų

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

1 uždavinys. Reikia išaiškinti, ar vektoriai $\mathbf{a}=(4;\ 2;\ 1)$, $\mathbf{b}=(8;\ 6;\ 3)$ ir $\mathbf{c}=(5;\ 2;\ 1)$ yra komplanarūs.

△ Remsimės (2) sąlyga:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 2\cdot 4 + 8 = 0.$$

Vektoriai komplanarūs. ▲

2 uždavinys. Reikia įrodyti, kad keturi taškai: $M_0(1;\ 2;\ -1)$, $M_1(0;\ 1;\ 5)$, $M_2(-1;\ 2;\ 1)$, $M_3(2;\ 1;\ 3)$ yra vienoje plokštumoje.

△ Jeigu keturi taškai yra vienoje plokštumoje, tai vektoriai $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$, $\overrightarrow{M_0M_3}$ – komplanarūs. Todėl jų mišrioji sandauga turi būti lygi nuliui.

Kadangi $\overrightarrow{M_0M_1}=(-1;\ -1;\ 6)$, $\overrightarrow{M_0M_2}=(-2;\ 0;\ 2)$ ir $\overrightarrow{M_0M_3}=$ $=(1;\ -1;\ 4)$, tai

$$(\overrightarrow{M_0M_1};\ \overrightarrow{M_0M_2};\ \overrightarrow{M_0M_3}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 10 + 12 = 0.$$

Vadinasi, taškai M_0, M_1, M_2 ir M_3 yra vienoje plokštumoje. ▲

3 uždavinys. Reikia rasti vektorių $\mathbf{a}=(4;\ -1;\ 1)$, $\mathbf{b}=(8;\ 3;\ 3)$ ir $\mathbf{c}=$ $=(5;\ 1;\ 1)$ nustatyto gretasienio tūrį.

△ Randame duotųjų vektorių mišriąją sandaugą:

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 7 - 7 = -14.$$

Remdamiesi (1) formule, randame

$$V = |(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \mathbf{c})| = |-14| = 14 \text{ (kub. v.)}. \ ▲$$

§ 2. TIESĖS LYGTYS

1. Sakykime, l – erdvės tiesė, einanti per taškus M_0 ir M_1 (2 pav.). Kad ir koks būtų taškas $M \in l$, vektorius $\overrightarrow{M_0M}$ yra kolinearus vektoriui $\overrightarrow{M_0M_1}$. Todėl yra toks skaičius $t \in R$, kad

$$\overrightarrow{M_0M} = t\cdot\overrightarrow{M_0M_1}. \quad (1)$$

Taigi, jeigu taškas M priklauso tiesei l, tai yra toks realusis skaičius t, kad teisinga (1) lygybė.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu kuriam nors taškui M, imant kurį nors $t \in R$, yra teisinga (1) lygybė, tai tas taškas priklauso tiesei l.

Kaip ir planimetrijoje (I d., § 30), (1) lygtis vadinama *tiesės, einančios per du duotuosius taškus* M_0 *ir* M_1, *vektorine* arba *vektorine parametrine lygtimi.* Kintamasis t vadinamas lygties *parametru.*

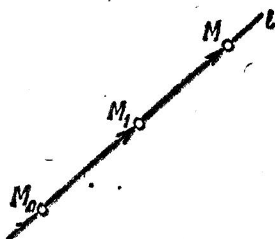
Vektorius $\overrightarrow{M_0M_1}$ (ir kiekvienas jam kolinearus vektorius $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) vadinamas tiesės *l krypties vektoriumi.*

Tiesės l krypties vektoriumi pasirinkę vektorių $\mathbf{a}$, (1) lygtį užrašysime šitaip:

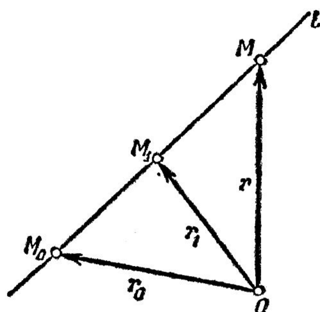
$$\overrightarrow{M_0M} = t\,\mathbf{a}; \qquad (2)$$

čia $t \in R$.

(2) lygtis vadinama *per tašką* M_0 *einančios tiesės, kurios krypties vektorius yra* $\mathbf{a}$, *vektorine parametrine lygtimi.*



2 pav.



3 pav.

Taigi tiesę erdvėje galima apibūdinti arba dviem taškais, arba tašku ir krypties vektoriumi.

Jeigu kuris nors erdvės taškas O yra fiksuotas, tai kiekvieną erdvės tašką M vienareikšmiškai nustato vektorius $\overrightarrow{OM}$, vadinamas taško M spinduliu vektoriumi taško O atžvilgiu (I d., § 15).

Sakykime, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ — taškų M, M_0 ir M_1 (3 pav.) spinduliai vektoriai, t. y. $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$.

Tada (1) tiesės lygtis yra šitokia:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0),$$

arba

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0); \qquad (3)$$

čia $t \in R$.

(2) lygtį galima užrašyti šitaip:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\,\mathbf{a},$$

arba

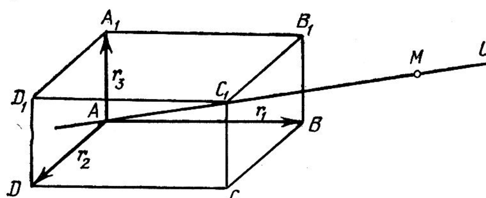
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}; \tag{4}$$

čia $t \in R$.

1 uždavinys. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (4 pav.);

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_1, \ \overrightarrow{AD} = \mathbf{r}_2, \ \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{r}_3.$$

Tiesės l, einančios per taškus A ir C_1, vektorinę lygtį reikia išreikšti vektoriais $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ ir $\mathbf{r}_3$.

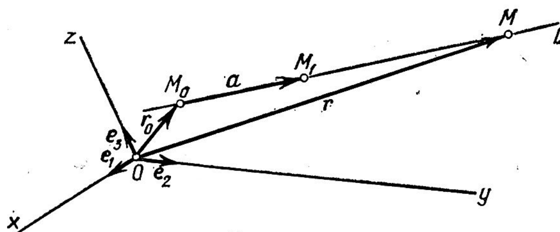


4 pav.

△ Tiesės l vektorinė lygtis yra $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{a}$; čia $\mathbf{a}$ – tiesės l krypties vektorius, o $M \in l$. Krypties vektoriumi galima pasirinkti vektorių $\overrightarrow{AC_1}$. Tada $\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AC_1}$. Atkarpa AC_1 yra duotojo gretasienio įstrižainė. Todėl (I d., § 13) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, arba $\overrightarrow{AC_1} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$.

Taigi $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, o tiesės l lygtis yra

$$\overrightarrow{AM} = t(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3); \text{ čia } t \in R. \ ▲$$



5 pav.

2. Sakykime, erdvės Dekarto koordinačių sistemą apibūdina taškas O ir bazinių vektorių sistema $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (5 pav.). Tarkime, kad $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0; y_0; z_0)$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = (a_1; a_2; a_3)$. Užrašę (4) lygtį koordinatėmis, gauname tris lygtis, išreiškiančias bet kurio tiesės taško M koordinates:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t, \\ y &= y_0 + a_2 t, \\ z &= z_0 + a_3 t; \end{aligned} \tag{5}$$

čia $t \in R$.

Tos lygtys vadinamos per tašką $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ einančios *tiesės l*, kurios krypties vektorius yra $\mathbf{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$, *parametrinėmis lygtimis*.

Iš (5) lygčių eliminuosime parametrą t. Tai galima padaryti, nes $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ ir todėl viena vektoriaus $\mathbf{a}$ koordinatė tikrai nelygi nuliui.

Iš pradžių tarkime, kad nė viena jo koordinatė nelygi nuliui. Tada

$$t=\frac{x-x_0}{a_1},\quad t=\frac{y-y_0}{a_2},\quad t=\frac{z-z_0}{a_3},$$

todėl

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}. \tag{6}$$

Šios lygtys vadinamos per tašką $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ einančios *tiesės*, kurios krypties vektorius yra $\mathbf{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$, *kanoninėmis lygtimis*.

Pastebėsime, kad (6) lygtys sudaro dviejų lygčių su trimis kintamaisiais sistemą.

Jeigu, pavyzdžiui, (5) lygtyse $a_1=0$, o $a_2\neq0$ ir $a_3\neq0$, tai, eliminavę parametrą t, taip pat gausime dviejų lygčių su trimis kintamaisiais sistemą:

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}. \end{cases}$$

Šios lygtys taip pat vadinamos *tiesės kanoninėmis lygtimis*. Kad būtų vienodžiau, jos irgi rašomos (6) pavidalu. Tada jeigu vardiklis yra lygus nuliui, tai ir skaitiklis laikomas lygiu nuliui.

Pagaliau jeigu, pavyzdžiui, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3\neq0$, tai gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0, \\ z=z_0+a_3t,\quad t\in R. \end{cases}$$

Tai lygtys tiesės, einančios per tašką $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ir lygiagrečios ašiai Oz. Čia $x=x_0$, $y=y_0$, o z – bet koks skaičius iš R.

Analogiškai koordinatiniu pavidalu galima užrašyti ir tiesės, einančios per du taškus M_0 ir M_1, (3) lygtį.

□ Iš tikrųjų, jeigu $\mathbf{r}=(x;\ y;\ z)$, $\mathbf{r}_0=(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $\mathbf{r}_1=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, tai iš (3) lygties išplaukia:

$$\begin{aligned} x&=x_0+t\,(x_1-x_0), \\ y&=y_0+t\,(y_1-y_0), \\ z&=z_0+t\,(z_1-z_0). \end{aligned} \tag{7}$$

Iš (7) lygčių sistemos eliminavę parametrą t, gauname

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{8}$$

Kai taškų M_0 ir M_1 kai kurios atitinkamos koordinatės yra lygios, samprotaujama taip pat, kaip ir nagrinėjant (6) lygtis. ■

2 uždavinys. Tiesė eina per tašką $M_0(-3;\ 2;\ 4)$, o jos krypties vektorius $\mathbf{a}=(2;\ -5;\ 3)$. Reikia sudaryti tiesės parametrines ir kanonines lygtis.

△ Šiuo atveju $x_0=-3$, $y_0=2$, $z_0=4$; $a_1=2$, $a_2=-5$, $a_3=3$. Tas reikšmes įrašę į (5) lygtis, gauname

$$x=-3+2t,$$
$$y=2-5t,$$
$$z=4+3t.$$

Remiantis (6) formule,

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-4}{3}. \ ▲$$

3 uždavinys. Reikia sudaryti lygtis tiesės, einančios per taškus $M_0(-4;\ 1;\ -3)$ ir $M_1(-5;\ 0;\ 3)$.

△ Šiuo atveju $x_0=-4$, $y_0=1$, $z_0=-3$; $x_1=-5$, $y_1=0$, $z_1=3$. Įrašę tas reikšmes į (8) formulę, gauname

$$\frac{x+4}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{6}. \ ▲$$

§ 3. PLOKŠTUMOS LYGTYS

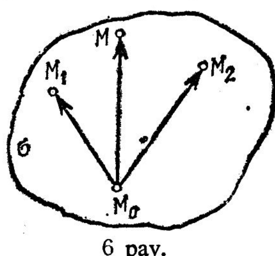
1. Sakykime, taškai M_0, M_1 ir M_2 nepriklauso vienai tiesei. Žinome, kad trys tokie taškai vienareikšmiškai nustato tam tikrą plokštumą σ. Vektoriai $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ sudaro tos plokštumos bazę (6 pav.).

Kad ir koks būtų taškas $M\in\sigma$, vektorių $\overrightarrow{M_0M}$ galima tiesiškai išreikšti bet kuriais dviem nekolineariais vektoriais (I d., § 11).

Konkrečiai

$$\overrightarrow{M_0M}=u\cdot\overrightarrow{M_0M_1}+v\cdot\overrightarrow{M_0M_2}; \qquad (1)$$

čia $u\in R$, $v\in R$.



6 pav.

Taigi, jeigu kuris nors erdvės taškas M priklauso plokštumai σ, tai yra tokie realieji skaičiai u ir v, kad teisinga (1) lygybė.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu kuriame nors erdvės taške M, imant kuriuos nors $u\in R$ ir $v\in R$, yra teisinga (1) lygybė, tai tas taškas priklauso plokštumai $(M_0,\ M_1,\ M_2)$, t. y. plokštumai σ.

1) lygtis vadinama *plokštumos, einančios per tris vienai tiesei nepriklausančius taškus* M_0, M_1, M_2, *vektorine* arba *vektorine parametrine lygtimi*. Kintamieji u ir v vadinami lygties *parametrais*.

Primename, kad tokiu atveju vektoriai $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ vadinami komplanariais, o plokštuma – tiems vektoriams lygiagrečia plokštuma (I d., § 12).

Jeigu taškai M_0, M_1, M_2 yra vienoje tiesėje, tai (1) lygtis yra per tuos taškus einančios tiesės lygtis.

Vektoriai $\overrightarrow{M_0M_1}$ ir $\overrightarrow{M_0M_2}$ (ir kiekviena jiems kolinearių vektorių $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ir $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ pora) vadinami *plokštumos σ krypties vektoriais.*

Kai plokštumos σ krypties vektoriai yra $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$, (1) lygtį galima užrašyti šitaip:

$$\overrightarrow{M_0M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}; \tag{2}$$

čia $u \in R$, $v \in R$.

(2) lygtis vadinama *per tašką M_0 einančios plokštumos, kurios krypties vektoriai yra* $\mathbf{a}$ *ir* $\mathbf{b}$, *vektorine parametrine lygtimi.*

Sakykime, erdvėje fiksuotas koks nors taškas O, o $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ (7 pav.). Tada (1) lygtį galima užrašyti šitaip:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + v(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0),$$

arba

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + v(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0); \tag{3}$$

čia $u \in R$, $v \in R$.

(2) lygtis šiuo atveju yra šitokia:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \text{ arba } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}; \tag{4}$$

čia $u \in R$, $v \in R$.

1 uždavinys. Keturi erdvės taškai M_1, M_2, M_3, M_4 tenkina sąlygą $3 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} - 2 \cdot \overrightarrow{M_1M_3} + \alpha \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \mathbf{0}$. Reikia įrodyti, kad, kai $\alpha \neq 0$, taškas M_4 priklauso plokštumai, kurią nustato nesantys vienoje tiesėje taškai M_1, M_2 ir M_3.

△ Kad taškas M_4 priklausytų plokštumai $\sigma = (M_1, M_2, M_3)$, su kokiais nors u ir v turi būti teisinga lygybė

$$\overrightarrow{M_1M_4} = u \cdot \overrightarrow{M_1M_2} + v \cdot \overrightarrow{M_1M_3}.$$

Iš sąlygos $\alpha \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = -3 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} + 2 \cdot \overrightarrow{M_1M_3}$. Jeigu $\alpha \neq 0$, tai $\overrightarrow{M_1M_4} = -\frac{3}{\alpha} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} + \frac{2}{\alpha} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}$. Kai $\alpha \neq 0$, iš tos lygybės išplaukia, kad $M_4 \in \sigma$. ▲

2. Vektoriai $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ (žr. 6 pav.) yra komplanarūs. Todėl jų mišrioji sandauga lygi nuliui (§1), t. y.

$$(\overrightarrow{M_0M}; \overrightarrow{M_0M_1}; \overrightarrow{M_0M_2}) = 0. \tag{5}$$

Iš mišriosios sandaugos apibrėžimo išplaukia

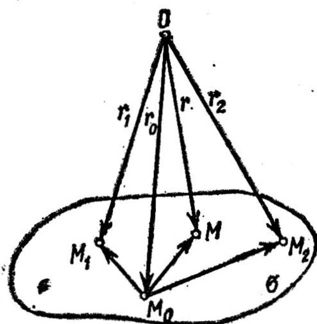
$$(\overrightarrow{M_0 M};\ \overrightarrow{M_0 M_1};\ \overrightarrow{M_0 M_2}) = \overrightarrow{M_0 M} \cdot [\overrightarrow{M_0 M_1};\ \overrightarrow{M_0 M_2}].$$

Remiantis vektorinės sandaugos apibrėžimu (I d., § 26), vektorius $[\overrightarrow{M_0M_1};\ \overrightarrow{M_0M_2}]$ yra statmenas plokštumai $(M_0,\ M_1,\ M_2)$. Jis vadinamas plokštumos *normalės vektoriumi* ir žymimas **n**.

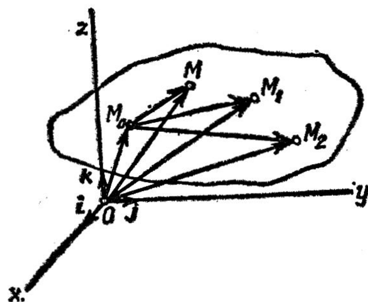
Taip pažymėję, (5) lygtį galime užrašyti šitaip:

$$\overrightarrow{M_0 M} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{6}$$

Ši lygtis vadinama *per tašką M_0 einančios plokštumos, kurios normalės vektorius yra* **n**, *lygtimi*. Kai $|\mathbf{n}| = 1$, (6) lygtis vadinama *normaline plokštumos lygtimi*.



7 pav.



8 pav.

(5) lygtį galima užrašyti ir šitaip:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0;\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0;\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) = 0; \tag{7}$$

čia $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ ir $\mathbf{r}_2$ – taškų M, M_0, M_1 ir M_2 spinduliai vektoriai.

Taigi plokštumą erdvėje galima apibūdinti arba trimis vienai tiesei nepriklausančiais taškais, arba tašku ir nekolinearių vektorių pora, arba tašku ir normalės vektoriumi.

3. Taškas O ir bazinių vektorių **i**, **j**, **k** sistema nustato erdvės stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą (8 pav.). Sakykime, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = (x;\ y;\ z)$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0;\ y_0;\ z_0)$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Tada (7) plokštumos lygtį galima išreikšti koordinatėmis (§ 1):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

2 uždavinys. Plokštuma eina per tris taškus: $M_0(-1;\ 0;\ 1)$, $M_1(-2;\ 3;\ 1)$, $M_2(2;\ -3;\ 4)$. Reikia sudaryti tos plokštumos lygtį.

△ Iš (8) formulės gauname

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ -2+1 & 3-0 & 1-1 \\ 2+1 & -3-0 & 4-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Išskleidę determinantą pirmos eilutės elementais, gauname

$$(x+1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$9(x+1)+3y-6(z-1)=0.$$

Taigi duotosios plokštumos lygtis yra $3x+y-2z+5=0$. ▲

§ 4. BENDROJI PLOKŠTUMOS LYGTIS

Sakykime, $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ ir $\mathbf{n}=(A;\ B;\ C)$. Tada 3 paragrafo (6) lygtį koordinatėmis galime užrašyti šitaip:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{1}$$

Pažymėkime $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Tada (1) lygtis virsta šitokia:

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

Taigi (2) lygtis yra vektoriui $\mathbf{n}=(A;B;C)$ statmenos plokštumos lygtis.

Įrodysime, kad kiekviena (2) pavidalo lygtis, kai $A^2+B^2+C^2\neq 0$ (t. y. A, B ir C visi kartu nelygūs nuliui), yra tam tikros plokštumos lygtis; tos plokštumos normalės vektorius yra $\mathbf{n}=(A;\ B;\ C)$.

□ Sakykime, $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – kuris nors (2) lygties sprendinys, t. y.

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3}$$

Iš (2) lygties atėmę (3), gauname

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Tai yra per tašką $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ einančios plokštumos lygtis. Tos plokštumos normalės vektorius $\mathbf{n}=(A;\ B;\ C)$. ■

(2) lygtis vadinama *bendrąja plokštumos lygtimi.*

Išnagrinėsime (2) lygties atskirus atvejus.

a) Kai $D=0$, (2) lygtis yra šitokia:

$$Ax+By+Cz=0. \tag{4}$$

Kadangi (4) lygtį tenkina $x=0$, $y=0$, $z=0$, tai ta lygtis aprašo per koordinačių pradžią einančią plokštumą.

b) Kai $C=0$, (2) lygtis yra

$$Ax+By+D=0 \tag{5}$$

pavidalo. (5) lygtis aprašo ašiai Oz lygiagrečią plokštumą, nes vektorius $\mathbf{n}=(A;\ B;\ 0)$ yra statmenas Oz (I d., § 20) ir nagrinėjamai plokštumai (jis yra tos plokštumos normalės vektorius).

c) Kai $C=0$, $D=0$, (2) lygtis virsta šitokia:

$$Ax+By=0. \tag{6}$$

Ji aprašo plokštumą, einančią per ašį Oz.

d) Kai $B=0$, $C=0$, (2) lygtis yra

$$Ax+D=0 \tag{7}$$

pavidalo. Kadangi vektorius $\mathbf{n}=(A;\ 0;\ 0)$ yra statmenas ašiai Oy ir ašiai Oz (I d., § 20) bei nagrinėjamai plokštumai (jis yra tos plokštumos normalės vektorius), tai (7) lygtis aprašo ašiai Ox statmeną plokštumą, kertančią tą ašį taške K; jo koordinatė lygi $-\frac{D}{A}$.

Savarankiškai išnagrinėkite kitus galimus (2) lygties atskirus atvejus.

1 uždavinys. Plokštuma eina per tašką $M_0(-3;\ 4;\ 7)$ ir yra statmena vektoriui $\mathbf{n}=(1;\ -2;\ 6)$. Reikia sudaryti tos plokštumos lygtį.

△Šiuo atveju $x_0=-3$, $y_0=4$, $z_0=7$; $A=1$, $B=-2$, $C=6$. Įrašę tas reikšmes į (1) lygtį, gauname ieškomąją lygtį:

$$1\cdot(x+3)-2\cdot(y-4)+6\cdot(z-7)=0, \text{ arba } x-2y+6z-31=0. \ \blacktriangle$$

2 uždavinys. Kokia plokštumos, kurios lygtis $5x=0$, padėtis stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje?

△ Kadangi šiuo atveju $B=0$ ir $C=0$, tai plokštuma yra statmena ašiai Ox.

Kadangi $D=0$, tai atkarpos, kurią plokštuma atkerta ašyje Ox, ilgis lygus 0. Todėl lygtis $5x=0$, arba $x=0$, nustato koordinačių plokštumą Oyz. ▲

§ 5. LYGIAGREČIOS PLOKŠTUMOS

Erdvėje dvi plokštumos arba neturi bendro taško, arba sutampa, arba susikerta.

Plokštumos σ_1 ir σ_2 vadinamos *lygiagrečiomis* (rašoma $\sigma_1 \parallel \sigma_2$), jeigu jos neturi nė vieno bendro taško arba sutampa.

□ Išnagrinėkime dvi plokštumas σ_1 ir σ_2, aprašytas lygtimis:

$$\sigma_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{1}$$
$$\sigma_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Pirmosios plokštumos normalės vektorius yra (žr. § 3) $\mathbf{n}_1=(A_1;\ B_1;\ C_1)$, o antrosios – $\mathbf{n}_2=(A_2;\ B_2;\ C_2)$.

Jeigu plokštumos σ_1 ir σ_2 yra lygiagrečios, tai jų normalių vektoriai kolinearūs. Todėl plokštumų σ_1 ir σ_2 lygiagretumo sąlygą galima užrašyti šitaip:

$$\mathbf{n}_2 = \lambda \mathbf{n}_1; \text{ čia } \lambda \in R. \quad (2)$$

Jeigu plokštumos σ_1 ir σ_2 neturi bendrų taškų, tai (1) sistema neturi sprendinių. Taip bus tada ir tik tada, kai

$$A_2 = \lambda A_1, \; B_2 = \lambda B_1, \; C_2 = \lambda C_1, \quad (3)$$

o $D_2 \neq \lambda D_1$; čia λ – koks nors skaičius.

Jeigu plokštumos σ_1 ir σ_2 sutampa, tai teisingos ne tik (3) lygybės, bet ir lygybė

$$D_2 = \lambda D_1. \; \blacksquare \quad (4)$$

Taigi dviejų plokštumų lygiagretumo būtina ir pakankama sąlyga yra

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (5)$$

Jeigu kuris nors iš koeficientų A_1, B_1, C_1 lygus nuliui, tai, aišku, ir atitinkamas koeficientas iš A_2, B_2, C_2 lygus nuliui.

1 uždavinys. Reikia įrodyti, kad plokštumos $3x+3y-3z-1=0$ ir $x+y-z+5=0$ yra lygiagrečios (neturi nė vieno bendro taško).

△ Taikome (5) formulę. Turime $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$. Vadinasi, plokštumos yra lygiagrečios. Kadangi $D_2 \neq \lambda D_1$ $\left(5 \neq \frac{1}{3} \cdot (-1)\right)$, tai plokštumos neturi bendro taško. ▲

2 uždavinys. Plokštuma σ_1 eina per tašką M_1 ir yra statmena vektoriui $\mathbf{n}_1 = (1; -2; 6)$. Plokštuma σ_2 eina per tašką M_2 ir yra statmena vektoriui $\mathbf{n}_2 = (5; -10; 6)$. Ar lygiagrečios plokštumos σ_1 ir σ_2?

△ Jeigu $\sigma_1 \| \sigma_2$, tai $\mathbf{n}_2 = \lambda \mathbf{n}_1$, arba $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. Šiuo atveju $5 = 5 \cdot 1$, $-10 = 5 \cdot (-2)$, o $6 \neq 5 \cdot 6$. Todėl σ_1 ir σ_2 nėra lygiagrečios. ▲

1 teorema. *Egzistuoja vienintelė plokštuma, einanti per duotąjį tašką ir lygiagreti duotajai plokštumai.*

□ Tarkime, kad plokštuma σ_1, kurios normalės vektorius $\mathbf{n}_1$, eina per tašką M ir yra lygiagreti plokštumai σ, kurios normalės vektorius $\mathbf{n}$.

Sakykime, egzistuoja kita plokštuma σ_2, lygiagreti plokštumai σ ir einanti per tašką M, o jos normalės vektorius yra $\mathbf{n}_2$.

Iš sąlygos $\sigma_1 \| \sigma$ išplaukia $\mathbf{n} = k \mathbf{n}_1$. Iš prielaidos $\sigma_2 \| \sigma$ išplaukia $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}_2$. Iš čia $k \mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$.

Iš paskutiniosios lygybės paaiškėja, kad vektoriai $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ yra kolinearūs, todėl plokštumos σ_1 ir σ_2 yra lygiagrečios. Kadangi σ_1 ir σ_2 turi bendrą tašką M, tai jos turi sutapti. ■

Išvada. *Jeigu dvi plokštumos yra lygiagrečios trečiajai, tai jos lygiagrečios ir viena kitai.* (Įrodykite patys.)

2 teorema (dviejų plokštumų lygiagretumo požymis). *Jeigu vienos plokštumos dvi susikertančios tiesės atitinkamai lygiagrečios ki-*

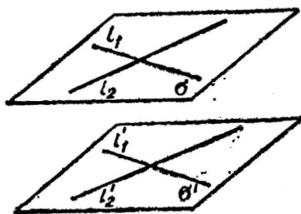
tos plokštumos dviem susikertančioms tiesėms, tai tos plokštumos yra lygiagrečios.

□ Sakykime, $l_1 \| l_1'$ ir $l_2 \| l_2'$ (9 pav.). Tada tiesės l_1 ir l_1' turi tą patį krypties vektorių. Jį žymėkime $\mathbf{a}_1$. Analogiškai, tiesės l_2 ir l_2' turi tą patį krypties vektorių. Jį žymėkime $\mathbf{a}_2$.

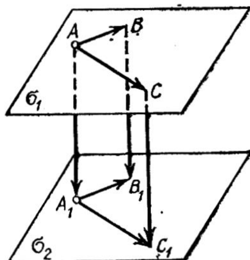
Vektorius $\mathbf{n}=[\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2]$ yra ir plokštumos σ, ir plokštumos σ' normalės vektorius. Remiantis (2) sąlyga, $\sigma_1 \| \sigma'$. ■

Pateiksime dar vieną tos teoremos įrodymo būdą.

□ Vektorių $\mathbf{n}=[\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2]$ išreikškime koordinatėmis. Tarkime, kad $\mathbf{n}= =(A; B; C)$. Tada plokštumos σ lygtis yra $Ax+By+Cz+D=0$, o plokštumos σ' lygtis – $Ax+By+Cz+D'=0$.



9 pav.



10 pav.

Sudarykime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ Ax+By+Cz+D'=0. \end{cases} \tag{6}$$

Aišku, (6) sistema arba neturi sprendinio (kai $D \neq D'$), arba turi begalinę sprendinių aibę (kai $D=D'$). Abiem atvejais plokštumos σ ir σ' yra lygiagrečios (remiantis (5) sąlyga). ■

3 uždavinys. Plokštumos σ_1 ir σ_2 apibūdintos taškų trejetais A, B, C ir A_1, B_1, C_1. Reikia įrodyti, kad $\sigma_1 \| \sigma_2$, kai $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$.

△ Parašykime šitokias teisingas lygybes (10 pav.):

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}=0,$$

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}=0.$$

Atsižvelgę į uždavinio sąlygą, gauname

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}, \quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}.$$

Bet $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ – plokštumos σ_1 krypties vektorių pora, o $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ – plokštumos σ_2 krypties vektorių pora. Todėl $\sigma_1 \| \sigma_2$. ▲

§ 6. SUSIKERTANČIOS PLOKŠTUMOS

Plokštumos σ_1 ir σ_2 *susikerta*, jeigu jos yra skirtingos ir turi bendrą tašką (rašoma: $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \varnothing$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$).

Jeigu dvi skirtingos plokštumos turi bendrą tašką, tai jų sankirta yra per tą tašką einanti tiesė.

Sudarysime tos tiesės lygtis.

□ Norint apibūdinti susikirtimo tiesę l, pakanka rasti bent vieną tiesės l tašką ir jos krypties vektorių $\mathbf{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$. Sakykime, plokštumos σ_1 ir σ_2 aprašytos lygtimis:

$$\begin{cases} \sigma_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ \sigma_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

Plokštumos σ_1 ir σ_2 susikerta. Vadinasi, remiantis apibrėžimu, jos yra skirtingos ir turi bendrą tašką: M_0: $\sigma_1 \cap \sigma_2 = l$; $M_0 \in l$.

Kadangi $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, tai 5 paragrafo (5) sąlyga neišpildyta.

Sakykime, pavyzdžiui,

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}, \text{ t. y. } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(1) sistemą užrašome šitaip:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y &= -D_1-C_1z, \\ A_2x+B_2y &= -D_2-C_2z. \end{aligned} \tag{2}$$

Pasirinkę $z=z_0$ (z_0 – bet koks skaičius), iš (2) sistemos rasime skaičius x_0 ir y_0. Skaičių trejetas x_0, y_0, z_0 nustato tašką M_0.

Ieškomoji tiesė l yra ir plokštumoje σ_1, ir plokštumoje σ_2. Todėl kiekvienas tos tiesės vektorius $\mathbf{a}$ yra statmenas ir vektoriui $\mathbf{n}_1=(A_1;\ B_1;\ C_1)$, ir vektoriui $\mathbf{n}_2=(A_2;\ B_2;\ C_2)$. Vadinasi, vektorių $\mathbf{a}$ galime laikyti vektorių $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ vektorine sandauga, t. y. $\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1;\ \mathbf{n}_2]$.

Remiantis koordinatėmis duotų vektorių vektorinės sandaugos išraiška (I d., § 27),

$$\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1;\ \mathbf{n}_2]=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\mathbf{k},$$

arba

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}, \text{ t. y. } \mathbf{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3).$$

Tada tiesės l kanoninės lygtys yra

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3},$$

arba

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

Taigi kiekvieną erdvės tiesę galima nagrinėti kaip dviejų plokštumų sankirtą. ■

1 uždavinys. Ar susikerta plokštumos

$$2x-y+z-1=0 \text{ ir } x-3y+2z-1=0?$$

△ Jeigu plokštumos susikerta, tai neišpildyta 5 paragrafo (5) sąlyga. Tikriname: $\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{-1} \neq \frac{2}{1}$. Vadinasi, duotos plokštumos susikerta. ▲

2 uždavinys. Reikia sudaryti kanonines lygtis tiesės, kuri yra plokštumų $x-2y+z+1=0$ ir $2x-y+3z-2=0$ sankirta.

△ Kadangi $\mathbf{n}_1=(1;\ -2;\ 1)$, $\mathbf{n}_2=(2;\ -1;\ 3)$, tai

$$\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1;\ \mathbf{n}_2]=\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=(-5;\ -1;\ 3).$$

Į duotąsias plokštumų lygtis įrašę $z_0=0$ ir išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} x-2y=-1, \\ 2x-y=2, \end{cases}$$

gauname $x_0=\frac{5}{3}$, $y_0=\frac{4}{3}$.

Ieškomoji lygtis yra $\dfrac{x-\frac{5}{3}}{-5}=\dfrac{y-\frac{4}{3}}{-1}=\dfrac{z}{3}$. ▲

Pastebėsime štai ką: jeigu plokštumos $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ir $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ susikerta, tai kiekvienos per jų sankirtą einančios plokštumos lygtis yra

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0;$$

čia λ – parametras, kurio kiekviena reikšmė nustato nagrinėjamos plokštumų aibės (vadinamos *plokštumų pluoštu*) konkrečią plokštumą.

3 uždavinys. Reikia sudaryti lygtį plokštumos, einančios per plokštumų $3x-2y-z+4=0$ ir $x-4y-3z-2=0$ sankirtą ir per tašką $M_0(1;\ 1;\ -2)$.

△ Sudarome plokštumų, einančių per duotųjų plokštumų susikirtimo tiesę, pluošto lygtį:

$$3x-2y-z+4+\lambda(x-4y-3z-2)=0. \qquad (4)$$

Kadangi taškas M_0 priklauso ieškomajai plokštumai, tai jis ir išskiria iš pluošto tą plokštumą. Todėl, įrašę jo koordinates į (4) lygtį, rasime atitinkamą parametro λ reikšmę:

$$3\cdot1-2\cdot1+2+4+\lambda(1-4\cdot1+6-2)=0;$$

vadinasi,

$$\lambda=-7.$$

Ieškomoji plokštumos lygtis yra

$$3x-2y-z+4-7(x-4y-3z-2)=0,$$

arba

$$2x-13y-10z-9=0. \ ▲$$

§ 7. KAMPAS TARP DVIEJŲ PLOKŠTUMŲ. STATMENOSIOS PLOKŠTUMOS

Kampu φ *tarp plokštumų* σ_1 ir σ_2 (rašoma $(\widehat{\sigma_1; \sigma_2})$) vadinamas kampas tarp jų normalių vektorių $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$.

Remdamiesi formule kampui tarp dviejų vektorių apskaičiuoti (I d., § 22), randame

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (1)$$

1 uždavinys. Reikia rasti kampą tarp plokštumų

$$3x + 2y + 5z + 6 = 0 \text{ ir } x + 4y + 3z + 4 = 0.$$

△ Remdamiesi (1) formule, randame

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{13}{19}};$$

φ reikšmę rasime lentelėse. ▲

Plokštumos σ_1 ir σ_2 yra *statmenos* viena kitai (rašoma $\sigma_1 \perp \sigma_2$), kai $(\widehat{\sigma_1; \sigma_2}) = \varphi = 90°$.

Jeigu $\sigma_1 \perp \sigma_2$, tai

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \qquad (2)$$

arba

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \qquad (3)$$

Kiekviena iš (2) ir (3) lygybių yra dviejų plokštumų, aprašytų 6 paragrafo (1) lygtimis, statmenumo būtina ir pakankama sąlyga.

2 uždavinys. Ar statmenos viena kitai plokštumos

$$2x + 5y + 7z - 1 = 0 \text{ ir } 3x - 4y + 2z = 0?$$

△ Randame duotųjų plokštumų normalių vektorius:

$$\mathbf{n}_1 = (2;\ 5;\ 7), \quad \mathbf{n}_2 = (3;\ -4;\ 2).$$

Jų skaliarinė sandauga $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 0$. Vadinasi, duotos plokštumos yra viena kitai statmenos. ▲

3 uždavinys. Reikia sudaryti lygtį plokštumos, einančios per taškus $M_1(2;\ 3;\ 4)$ ir $M_2(-1;\ 0;\ 1)$ ir statmenos plokštumai $2x + y - z + 4 = 0$.

△ Pirmas būdas. Per tašką M_1 einančios plokštumos lygtis yra

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z-4) = 0 \qquad (4)$$

pavidalo. Kadangi taškas M_2 turi priklausyti tai plokštumai, tai

$$A(-1-2) + B(0-3) + C(1-4) = 0,$$

arba

$$A + B + C = 0. \qquad (5)$$

Iš dviejų plokštumų statmenumo sąlygos turime

$$2 \cdot A + 1 \cdot B - 1 \cdot C = 0,$$

arba

$$2A + B - C = 0. \qquad (6)$$

Išsprendę (5) ir (6) lygčių sistemą, randame

$$A = 2C, \; B = -3C.$$

Rastąsias reikšmes įrašę į (4) lygtį, gauname

$$2C(x-2) - 3C(y-3) + C(z-4) = 0,$$

arba

$$2x - 3y + z + 1 = 0.$$

Tai ir yra ieškomoji plokštumos lygtis.

Antras būdas. Sakykime, $M(x; y; z)$ — bet kuris ieškomosios plokštumos taškas. Tada vektoriai $\overrightarrow{M_1M} = (x-2;\ y-3;\ z-4)$ ir $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3;\ -3;\ -3)$ yra lygiagretūs tai plokštumai. Duotosios plokštumos $2x + y - z + 4 = 0$ normalės vektorių pažymėkime $\mathbf{n}$; $\mathbf{n} = (2;\ 1;\ -1)$. Vektoriai $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir normalės vektorius $\mathbf{n}$ yra komplanarūs. Todėl tų trijų vektorių mišrioji sandauga lygi nuliui:

$$(\overrightarrow{M_1M};\ \overrightarrow{M_1M_2};\ \mathbf{n}) = 0,$$

arba

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Išskleidę determinantą, gausime ieškomąją plokštumos lygtį. ▲

§ 8. LYGIAGREČIOS TIESĖS

Tiesės l_1 ir l_2 vadinamos *lygiagrečiomis* (rašoma $l_1 \| l_2$), jeigu jos yra vienoje plokštumoje ir neturi bendro taško arba sutampa.

Jeigu tiesės l_1 ir l_2 yra lygiagrečios, tai jų krypties vektoriai $\mathbf{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ ir $\mathbf{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$ yra kolinearūs (I d., § 25), t. y.

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}, \qquad (1)$$

arba

$$[\mathbf{a};\ \mathbf{b}] = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Išreiškę koordinatėmis, turime

$$b_1 = ka_1,\ b_2 = ka_2,\ b_3 = ka_3, \qquad (3)$$

arba

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}. \qquad (4)$$

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu tiesių l_1 ir l_2 krypties vektoriai yra kolinearūs, tai tos tiesės lygiagrečios.

□ Iš tikrųjų, sakykime, $\mathbf{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ir $\mathbf{b}=(b_1;\ b_2;\ b_3)$ – tiesių l_1 ir l_2 $(l_1 \neq l_2)$ krypties vektoriai, o $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ir $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ – toms tiesėms priklausantys taškai $(M_1 \in l_1,\ M_2 \in l_2)$. Nagrinėkime vektorių $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ ir mišriąją sandaugą

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \overrightarrow{M_1M_2})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Jeigu vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ yra kolinearūs, tai $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$, arba $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$, $b_3=ka_3$. Tada (5) determinantas lygus nuliui (§ 1), t. y. vektoriai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ir $\overrightarrow{M_1M_2}$ – komplanarūs, o tiesės yra vienoje plokštumoje.

Kadangi vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ kolinearūs, tai tiesės l_1 ir l_2 negali susikirsti viename taške. Taigi $l_1 \| l_2$.

Kai $l_1=l_2$, teiginys akivaizdus. ■

Taigi (1) arba (2) lygybė yra dviejų tiesių lygiagretumo būtina ir pakankama sąlyga.

1 uždavinys. Ar lygiagrečios tiesės

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{4} \text{ ir } \frac{x-7}{6}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{8}?$$

△ Duotųjų tiesių krypties vektoriai yra $\mathbf{a}=(3;\ 2;\ 4)$ ir $\mathbf{b}=(6;4;8)$. Kadangi vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ kolinearūs, tai tiesės yra lygiagrečios. ▲

2 uždavinys. A, B, C, D, O – skirtingi erdvės taškai. Žinoma, kad $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. Reikia įrodyti, kad $(AB) \| (CD)$.

△ Turime: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$.

Vadinasi, $(AB) \| (CD)$. ▲

Teorema. *Jeigu dvi tiesės yra lygiagrečios trečiajai, tai jos lygiagrečios viena kitai.*

□ Sakykime, tiesių l, l_1, l_2 krypties vektoriai yra $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ir $l_1 \| l$, $l_2 \| l$. Įrodysime, kad $l_1 \| l_2$. Kadangi $l_1 \| l$, tai $\mathbf{a}_1=k\mathbf{a}$. Kadangi $l \| l_2$, tai $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}_2$. Tada $\mathbf{a}_1=k(\lambda\mathbf{a}_2)=k\lambda\mathbf{a}_2$.

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad $l_1 \| l_2$. ■

§ 9. SUSIKERTANČIOS IR PRASILENKIANČIOS TIESĖS

1. Tiesės l_1 ir l_2 vadinamos *susikertančiomis*, jeigu jos turi vienintelį bendrą tašką (rašoma $l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$ ir $l_1 \neq l_2$).

Susikertančios tiesės yra vienoje plokštumoje.

□ Iš tikrųjų, jeigu tiesės l_1 ir l_2 susikerta $(l_1 \cap l_2=M)$, tai jų krypties vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ nekolinearūs. Tačiau vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ pora bei tiesių susikirtimo taškas M nustato vienintelę plokštumą, kurioje yra ir tos tiesės. ■

Jeigu tiesės susikerta, tai jų krypties vektoriai nekolinearūs, t. y. $\mathbf{b} \neq k\mathbf{a}$, arba $[\mathbf{a}; \mathbf{b}] \neq \mathbf{0}$. Kadangi tiesės l_1 ir l_2 yra vienoje plokštumoje, tai $(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \overrightarrow{M_1M_2}) = 0$. Todėl susikertančių tiesių

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

ir $\mathbf{b} \neq k\mathbf{a}$, t. y. to determinanto pirmos dvi eilutės neproporcingos.

1 uždavinys. Ar susikerta tiesės

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-4}{-7} \text{ ir } \frac{x-6}{1} = \frac{y-13}{3} = \frac{z+2}{1}?$$

△ Apskaičiuosime (1) determinantą:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Taigi tiesės arba susikerta (jeigu jų krypties vektoriai nekolinearūs), arba yra lygiagrečios (jeigu jų krypties vektoriai kolinearūs). Patikrinsime, ar išpildyta sąlyga $\mathbf{b} \neq k\mathbf{a}$:

$$(1;\ 3;\ 1) \neq k(2;\ 5;\ -7).$$

Todėl duotosios tiesės susikerta. ▲

2 uždavinys. Dviejų tiesių l_1 ir l_2, esančių vienoje plokštumoje, krypties vektoriai yra $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ir $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Reikia įrodyti, kad tiesės l_1 ir l_2 susikerta, jeigu $\mathbf{a} \neq k\mathbf{b}$.

△ Tarkime, kad tiesės l_1 ir l_2 yra lygiagrečios. Tada $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, arba $(\lambda-1)\mathbf{a} = (\lambda+1)\mathbf{b}$. Jeigu $\lambda \neq 1$, tai $\mathbf{a} = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\mathbf{b}$, bet tai prieštarauja sąlygai. Jeigu $\lambda = 1$, tai vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ kolinearumas akivaizdus (kodėl?). Gautoji prieštara ir tai, kad tiesės yra vienoje plokštumoje, įrodo, jog tiesės l_1 ir l_2 susikerta. ▲

2. Tiesės l_1 ir l_2 vadinamos *prasilenkiančiomis* (rašoma $l_1 \dotminus l_2$), jeigu jos nesusikerta ir nėra lygiagrečios.

Aišku, prasilenkiančios tiesės l_1 ir l_2 nėra vienoje plokštumoje. Jeigu $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ — tų tiesių krypties vektoriai, o taškai M_1 ir M_2 priklauso atitinkamai tiesėms l_1 ir l_2, tai vektoriai $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ nekomplanarūs. Taigi mišrioji sandauga $(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0$. Aišku, šiuo atveju $[\mathbf{a}; \mathbf{b}] \neq \mathbf{0}$.

3 uždavinys. Ar tiesės

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{1} \text{ ir } \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$$

yra prasilenkiančios?

△ Išnagrinėsime vektorių $\mathbf{a}=(2;\ 3;\ 1)$, $\mathbf{b}=(-1;\ 2;\ 3)$ ir $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;\ -5;\ -1)$ mišriąją sandaugą:

$$(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \overrightarrow{M_1M_2})=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}=26+6+3=35\neq 0.$$

Duotos tiesės yra prasilenkiančios. ▲

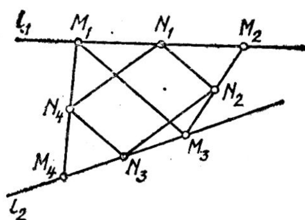
4 uždavinys. $(AB)\neq(CD)$ ir $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Reikia išaiškinti tiesių AB ir CD tarpusavio padėtį.

△ Išnagrinėkime teisingą lygybę

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}. \tag{2}$$

Sąlygoje duota $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ arba $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{CA}$. Tada iš (2) lygybės gauname $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$ arba $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Vadinasi, $(AB)\|(CD)$. ▲

5 uždavinys. Keturi skirtingi erdvės taškai M_1, M_2, M_3, M_4 paeiliui sujungti atkarpomis. N_1, N_2, N_3, N_4 – atkarpų M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_1 vidurio taškai. Reikia įrodyti, kad taškai N_1, N_2, N_3, N_4 yra vienoje plokštumoje.



11 pav.

△ Taškai M_1, M_2 nustato tiesę l_1, o taškai M_3, M_4 – tiesę l_2 (11 pav.).

Teiginys akivaizdus, kai $l_1\|l_2$ arba l_1 ir l_2 susikerta.

Sakykime, l_1 ir l_2 yra prasilenkiančios tiesės. Taškai M_1, M_3, M_4 nustato plokštumą σ_1, o taškai M_1, M_2, M_4 – plokštumą σ_2. (M_1M_4) yra tų plokštumų susikirtimo tiesė.

Iš sąlygos išplaukia, kad $[N_3N_4]$ yra $\triangle M_1M_3M_4$ vidurinė linija, o $[N_1N_2]$ – $\triangle M_1M_2M_3$ vidurinė linija. Todėl $(N_3N_4)\|(M_1M_3)$ ir $(N_1N_2)\|\|(M_1M_3)$. Remiantis 8 paragrafo teorema, $(N_3N_4)\|(N_1N_2)$. Vadinasi, taškai N_1, N_2, N_3, N_4 priklauso vienai plokštumai. ▲

§ 10. KAMPAS TARP TIESIŲ. STATMENOSIOS TIESĖS

Kampu tarp tiesių l_1 ir l_2 (rašoma $\widehat{(l_1;\,l_2)}$) vadinamas kampas tarp jų krypties vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$.

Remiamės žinoma kampo tarp dviejų vektorių formule (I d., § 22). Randame

$$\cos\widehat{(l_1;\ l_2)}=\cos\widehat{(\mathbf{a};\ \mathbf{b})}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}, \tag{1}$$

arba, išreiškę koordinatėmis,

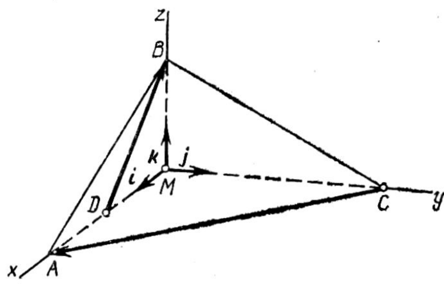
$$\cos(\widehat{l_1;\ l_2}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}; \qquad (2)$$

čia a_1, a_2, a_3 ir b_1, b_2, b_3 – vektorių **a** ir **b** koordinatės.

1 uždavinys. Trikampės piramidės $MABC$ briaunos MA, MB ir MC statmenos viena kitai (12 pav.). Jų ilgiai lygūs 4, 3, 6. D yra $[MA]$ vidurio taškas. Reikia rasti $(\widehat{(CA);\ (DB)})$.

△ Sakykime, $\vec{CA}$ ir $\vec{DB}$ – tiesių CA ir DB krypties vektoriai. Tada

$$\varphi = (\widehat{(CA);\ (DB)}) = (\widehat{\vec{CA};\ \vec{DB}}).$$



12 pav.

Tašką M laikykime koordinačių pradžia. Iš uždavinio sąlygos turime: $A\,(4;0;0)$, $B\,(0;0;3)$, $C\,(0;6;0)$, $D\,(2;0;0)$. Todėl $\vec{CA} = (4;\ -6;\ 0)$, $\vec{DB} = (-2;\ 0;\ 3)$.

Taikome (2) formulę:

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot(-2) + (-6)\cdot 0 + 0\cdot 3}{\sqrt{16+36+0}\cdot\sqrt{4+0+9}} = -\frac{4}{13}.$$

φ reikšmę rasime lentelėse. ▲

Žinoma (I d., § 20), kad $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ tada ir tik tada, kai $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. Todėl lygybė

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0, \qquad (3)$$

arba

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \qquad (4)$$

yra (susikertančių arba prasilenkiančių) tiesių l_1 ir l_2 statmenumo būtina ir pakankama sąlyga.

2 uždavinys. Ar statmenos tiesės

$$\frac{x-0{,}3}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-13} \text{ ir } \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+2}{2}\ ?$$

△ Tiesių krypties vektoriai yra $\mathbf{a} = (2;\ 4;\ -13)$ ir $\mathbf{b} = (3;\ 5;\ 2)$. Remiamės (4) sąlyga:

$$2\cdot 3 + 4\cdot 5 - 13\cdot 2 = 0.$$

Tiesės statmenos. ▲

3 uždavinys. Reikia sudaryti lygtis tiesės, einančios per tašką $M_0\,(2;\ -3;\ 4)$ ir statmenos tiesėms

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}, \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{3}.$$

△ Duotųjų tiesių krypties vektoriai yra $\mathbf{a}_1=(1;\ -1;\ 1)$ ir $\mathbf{a}_2=(2;\ 1;\ 3)$.

Ieškomoji tiesė statmena duotosioms tiesėms, todėl jos krypties vektoriumi galima pasirinkti vektorių $\mathbf{a}=[\mathbf{a}_1;\ \mathbf{a}_2]$ (I d., § 26).

Taigi

$$\mathbf{a}=\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(-4;\ -1;\ 3).$$

Vadinasi, ieškomosios tiesės lygtys yra

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{3},\ \text{arba}\ \frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-3}.\ \blacktriangle$$

§ 11. ERDVĖS TIESIŲ TARPUSAVIO PADĖTIES UŽDAVINIAI

Sakykime, $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ yra tiesių l_1 ir l_2 krypties vektoriai, M_1 – tiesei l_1 priklausantis taškas ir M_2 – tiesei l_2 priklausantis taškas.

Kai $(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \overrightarrow{M_1M_2})=0$, tiesės l_1 ir l_2 yra vienoje plokštumoje. Tiesės lygiagrečios, jeigu vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ kolinearūs, t. y. $[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]=\mathbf{0}$. Tiesės susikerta, jeigu vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ nekolinearūs, t. y. $[\mathbf{a};\ \mathbf{b}]\neq\mathbf{0}$.

Kai $(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \overrightarrow{M_1M_2})\neq 0$, tiesės l_1 ir l_2 yra prasilenkiančios.

1 uždavinys. Reikia išaiškinti tiesių tarpusavio padėtį, kai duotos tiesių lygtys:

a) $x=1-t,\ y=2+3t,\ z=-3+t;$

$x=-1+t,\ y=3-t,\ z=2+2t;$

b) $x=3+2t,\ y=3-8t,\ z=7+4t;$

$x=2-t,\ y=5+t,\ z=7+t;$

c) $x=-3+t,\ y=1-3t,\ z=3+2t;$

$x=4+3t,\ y=2-9t,\ z=8+6t.$

$$\triangle\ \text{a)}\ (\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \overrightarrow{M_1M_2})=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1-1 & 3-2 & 2-(-3) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=5-12+1-2+2-15=-21\neq 0.$$

Tiesės yra prasilenkiančios.

b) $(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \overrightarrow{M_1M_2})=\begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2-3 & 5-3 & 7-7 \end{vmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0+8-8+4-4-0=0.$$

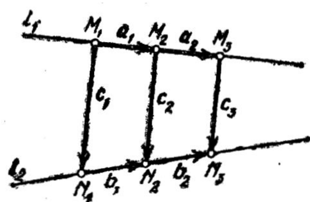
Kadangi $\frac{2}{-1}\neq\frac{-8}{1}\neq\frac{4}{1}$, tai tiesės susikerta.▲

c) $(\mathbf{a};\ \mathbf{b};\ \overrightarrow{M_1M_2})=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -9 & 6 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-45-126+6+126-6+$

$$+45=0.$$

Kadangi $\frac{1}{3}=\frac{-3}{-9}=\frac{2}{6}$, tai tiesės yra lygiagrečios. ▲

2 uždavinys. l_1 ir l_2 – prasilenkiančios tiesės. M_1, M_2, M_3 – skirtingi tiesės l_1 taškai. Per tuos taškus išvestos tiesės M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, statmenos tiesei l_2. Reikia įrodyti, kad $|M_1M_2|:|M_2M_3|=|N_1N_2|:|N_2N_3|$, kai $(\widehat{l_1;\ l_2})\neq 90°$, o N_1, N_2, N_3 – tiesės l_2 taškai.



13 pav.

△ Pažymėkime $\overrightarrow{M_1M_2}=\mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{M_2M_3}=\mathbf{a}_2$, $\overrightarrow{N_1N_2}=\mathbf{b}_1$, $\overrightarrow{N_2N_3}=\mathbf{b}_2$, $\overrightarrow{M_1N_1}=\mathbf{c}_1$, $\overrightarrow{M_2N_2}=\mathbf{c}_2$, $\overrightarrow{M_3N_3}=\mathbf{c}_3$, $(\widehat{l_1;\ l_2})=\varphi$.

Iš sąlygos (13 pav.) turime:

$$\mathbf{c}_2=-\mathbf{a}_1+\mathbf{c}_1+\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{c}_2=\mathbf{a}_2+\mathbf{c}_3-\mathbf{b}_2.$$

Tas lygybes skaliariškai padauginkime atitinkamai iš $\mathbf{b}_1$ ir $\mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{b}_1=-\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_1^2, \quad (1)$$

$$\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2+\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_2^2. \quad (2)$$

Atsižvelgę į sąlygoje nurodytų tiesių statmenumą ir tiesių statmenumo požymį, turime: $\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{b}_1=0$, $\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{b}_1=0$, $\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{b}_2=0$, $\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{b}_2=0$. Todėl iš (1) ir (2) gauname

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=|\mathbf{b}_1|^2 \text{ ir } \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2=|\mathbf{b}_2|^2.$$

Kadangi $(\widehat{\mathbf{a}_1;\ \mathbf{b}_1})=(\widehat{\mathbf{a}_2;\ \mathbf{b}_2})=(\widehat{l_1;\ l_2})\neq 90°$, tai

$$|\mathbf{a}_1|\cdot|\mathbf{b}_1|\cdot\cos\varphi=|\mathbf{b}_1|^2 \text{ ir } |\mathbf{a}_2|\cdot|\mathbf{b}_2|\cdot\cos\varphi=|\mathbf{b}_2|^2,$$

arba

$$|\mathbf{a}_1|\cdot\cos\varphi=|\mathbf{b}_1| \text{ ir } |\mathbf{a}_2|\cdot\cos\varphi=|\mathbf{b}_2|.$$

Kadangi $\cos\varphi\neq 0$, tai $|\mathbf{a}_1| : |\mathbf{a}_2|=|\mathbf{b}_1| : |\mathbf{b}_2|$, arba

$$|M_1M_2|:|M_2M_3|=|N_1N_2|:|N_2N_3|. \blacktriangle$$

§ 12. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS LYGIAGRETUMAS

Erdvėje tiesė ir plokštuma arba neturi nė vieno bendro taško, arba tiesė yra plokštumoje, arba tiesė ir plokštuma susikerta vieninteliame taške.

Tiesė l ir plokštuma σ vadinamos *lygiagrečiomis* (rašoma $l\,||\,\sigma$ arba $\sigma||l$), jeigu jos neturi bendro taško arba tiesė yra plokštumoje.

Sakykime, $\mathbf{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$ yra tiesės l krypties vektorius, o $\mathbf{n}=(A;\ B;\ C)$ – plokštumos σ normalės vektorius.

Jeigu $l||\sigma$, tai vektorius $\mathbf{a}$ lygiagretus plokštumai σ; vadinasi, vektoriai $\mathbf{n}$ ir $\mathbf{a}$ statmeni.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu plokštumos σ normalės vektorius $\mathbf{n}$ yra statmenas tiesės l krypties vektoriui $\mathbf{a}$, tai $l||\sigma$.

□ Iš tikrųjų, sakykime, plokštuma σ aprašyta lygtimi

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0, \quad (1)$$

o tiesė l – lygtimi

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{a} \quad (t\in R). \quad (2)$$

$\mathbf{r}$ reikšmę iš (2) įrašę į (1), gauname $(\mathbf{r}_1+t\mathbf{a}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0$, arba

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}+t\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=0. \quad (3)$$

Iš sąlygos $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=0$. Tada (3) lygtis t atžvilgiu neturi sprendinių, jeigu $(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}\neq 0$, t. y. jeigu taškas, kurio spindulys vektorius yra $\mathbf{r}_1$, nepriklauso plokštumai σ. Jeigu tas taškas priklauso plokštumai σ, t. y. $(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\times\times\mathbf{n}=0$, tai kiekvienas t tenkina (3) lygtį, t. y. $l\subset\sigma$. Vadinasi, $l||\sigma$. ■

Taigi, kad plokštuma, aprašyta (1) lygtimi, ir tiesė, aprašyta (2) lygtimi, būtų lygiagrečios, būtina ir pakanka, kad būtų

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}=0, \quad (4)$$

arba, išreiškus koordinatėmis,

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0. \quad (5)$$

1 uždavinys. Reikia išaiškinti plokštumos $7x-2y+3z-1=0$ ir tiesės $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-5}$ tarpusavio padėtį.

△ Čia $\mathbf{n}=(7;\ -2;\ 3)$, $\mathbf{a}=(3;\ 3;\ -5)$; $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}=7\cdot 3-2\cdot 3-3\cdot 5=0$. Tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios. ▲

2 uždavinys. Reikia sudaryti lygtį plokštumos, einančios per tašką $M_0\,(4;\ -3;\ 1)$ ir lygiagrečios tiesėms

$$l_1:\ \frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$$

ir

$$l_2:\ \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}.$$

△ Iš sąlygos išplaukia, kad tiesės l_1 krypties vektorius $\mathbf{a}_1=(6;\ 2;\ -3)$, o tiesės l_2 krypties vektorius $\mathbf{a}_2=(5;\ 4;\ 2)$.

Sakykime, $M(x;\ y;\ z)$ – bet kuris ieškomosios plokštumos taškas. Tada $\overrightarrow{M_0M}=(x-4;\ y+3;\ z-1)$.

Kadangi vektoriai $\overrightarrow{M_0M}$, $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ komplanarūs, tai $(\overrightarrow{M_0M};\ \mathbf{a}_1;\ \mathbf{a}_2)=0$, arba

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ 6 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Išskleidę determinantą, gauname ieškomąją plokštumos lygtį: $16x-27y+$ $+14z-159=0$. ▲

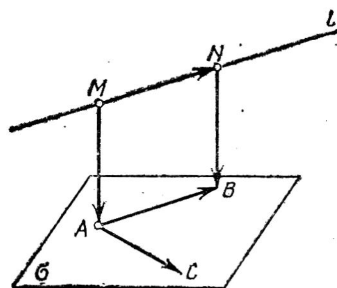
Jeigu plokštuma σ ir tiesė l yra lygiagrečios, tai tiesės l krypties vektorius yra lygiagretus plokštumai σ (I d., § 12). Taigi kiekvieną plokštumai σ lygiagrečios tiesės l krypties vektorių galima laikyti vienu tos plokštumos krypties vektorių.

Jeigu tiesė l ir plokštuma σ yra lygiagrečios, tai tiesės krypties vektorius ir plokštumos krypties vektorių pora yra komplanarūs (I d., § 12). Todėl tiesės l krypties vektorių galima tiesiškai išreikšti plokštumos σ krypties vektoriais.

Šiais samprotavimais pagrįstas pateikiamos teoremos įrodymas.

Teorema (tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis). *Jeigu tiesė yra lygiagreti kuriai nors plokštumoje esančiai tiesei, tai ta tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios.* (Įrodykite patys.)

3 uždavinys. M_1, M_2 ir M_3 – skirtingi taškai, nesantys vienoje tiesėje. Vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ – plokštumos σ krypties vektoriai. Be to, $\overrightarrow{M_1M_2}=3\mathbf{a}-5\mathbf{b}$, o $\overrightarrow{M_1M_3}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Reikia įrodyti, kad tiesė M_2M_3 yra lygiagreti plokštumai σ.



14 pav.

△ Raskime tos tiesės krypties vektorių: $\overrightarrow{M_2M_3}=\overrightarrow{M_1M_3}-\overrightarrow{M_1M_2}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})-$ $-(3\mathbf{a}-5\mathbf{b})=-2\mathbf{a}+6\mathbf{b}$. Taigi $\overrightarrow{M_2M_3}$ yra vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ tiesinis darinys. Todėl $(M_2M_3)\parallel\sigma$. ▲

4 uždavinys. Tiesė l apibūdinta taškais M ir N, plokštuma σ – taškais A, B ir C. Reikia įrodyti, kad $(MN)\parallel\sigma$, kai $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{NB}$.

△ Išnagrinėkime teisingą lygybę (14 pav.) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\mathbf{0}$. Iš sąlygos gauname $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{NB}$, todėl $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$, arba $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$. Vadinasi, $(MN)\parallel(AB)$, bet tada ir $(MN)\parallel\sigma$. ▲

§ 13. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS KIRTIMASIS. KAMPAS TARP TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

1. Sakoma, kad tiesė l ir plokštuma σ *susikerta*, jeigu jos turi vienintelį bendrą tašką (rašoma $l \cap \sigma = M$).

Tiesė l kerta plokštumą σ vieninteliame taške tada ir tik tada, kai jos krypties vektorius $\mathbf{a}$ nelygiagretus tai plokštumai, t. y.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \neq 0, \qquad (1)$$

arba, išreiškus koordinatėmis,

$$A a_1 + B a_2 + C a_3 \neq 0. \qquad (2)$$

1 uždavinys. Reikia įrodyti, kad tiesė

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

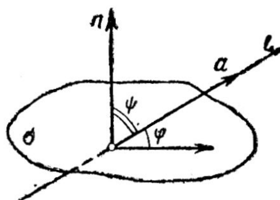
ir plokštuma $x - y + z - 1 = 0$ susikerta. ▲

△ Randame vektorių $\mathbf{n} = (1;\ -1;\ 1)$ ir $\mathbf{a} = (2;\ 3;\ 4)$ skaliarinę sandaugą:

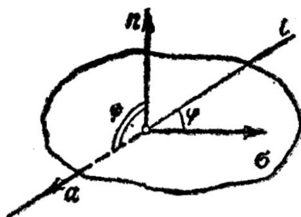
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 3 \neq 0.$$

Vadinasi, tiesė ir plokštuma susikerta. ▲

2. *Kampu φ tarp tiesės ir plokštumos* vadinamas kampas, esantis intervale $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; jis randamas iš lygybės $\psi = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$; čia ψ – kampas tarp plokštumos normalės vektoriaus ir tiesės krypties vektoriaus.



15 pav.



16 pav.

Vektorius $\mathbf{n} = (A;\ B;\ C)$ statmenas plokštumai σ, todėl tiesės l krypties vektorius $\mathbf{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ su vektoriumi $\mathbf{n}$ sudaro kampą $\psi = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$ (15, 16 pav.).

Kadangi $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, tai

$$\sin \varphi = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) \right| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{a}|}, \qquad (3)$$

arba, išreiškus koordinatėmis,

$$\sin \varphi = \frac{|A a_1 + B a_2 + C a_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \qquad (4)$$

(3) lygybę palyginę su 12 paragrafo (3) lygybe, matome, kad, kai tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios, $\sin\varphi=0$, t. y. tokiu atveju laikoma, kad φ lygus 0.

2 uždavinys. Reikia rasti kampą tarp tiesės $x=2-3t$, $y=1-t$, $z=-4t$ ir plokštumos $x+2y-z+1=0$.

△ Kadangi $\mathbf{n}=(1;2;-1)$ ir $\mathbf{a}=(-3;-1;-4)$, tai $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}=1\cdot(-3)+$ $+2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-4)=-1\neq 0$. Vadinasi, tiesė ir plokštuma susikerta.

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot(-3)+2\cdot(-1)-1\cdot(-4)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-4)^2}}=$$

$$=\frac{|-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{26}}=\frac{1}{2\sqrt{39}}.$$

Kampo φ reikšmę rastume lentelėse. ▲

3. Išnagrinėkime tiesę, aprašytą parametrinėmis lygtimis

$$x=x_0+a_1t,\quad y=y_0+a_2t,\quad z=z_0+a_3t, \tag{5}$$

ir plokštumą, aprašytą bendrąja lygtimi

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{6}$$

Aišku, norint rasti tiesės ir plokštumos bendrus taškus, reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t, \\ y=y_0+a_2t, \\ z=z_0+a_3t, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{7}$$

Į plokštumos lygtį įrašę kintamųjų x, y, z išraiškas, gauname

$$A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0,$$

arba

$$(Aa_1+Ba_2+Ca_3)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \tag{8}$$

Išnagrinėsime šios lygties sprendimo galimus atvejus.

a) Jeigu $Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$, tai (8) lygtis turi vienintelį sprendinį

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Aa_1+Ba_2+Ca_3}.$$

Šiuo atveju (5) tiesė ir (6) plokštuma susikerta vieninteliame taške M, kurio koordinatės gaunamos rastąją t reikšmę įrašius į tiesės parametrines lygtis.

b) Jeigu $Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, tai (8) lygtis neturi sprendinių. Šiuo atveju tiesė ir plokštuma neturi bendrų taškų.

c) Jeigu $Aa_1+Ba_2+Ca_3=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, tai kiekviena t reikšmė tenkina (8) lygtį. Šiuo atveju tiesė yra plokštumoje.

3 uždavinys. Reikia išaiškinti tiesės $x=2-3t$, $y=1-t$, $z=-4t$ ir plokštumos $x+2y-z+1=0$ tarpusavio padėtį. Jeigu tiesė ir plokštuma susikerta, tai reikia rasti susikirtimo taško koordinates.

△ a) Apskaičiuosime $Aa_1+Ba_2+Ca_3$ reikšmę:

$$1\cdot(-3)+2\cdot(-1)+1\cdot(-4)=-1\neq 0.$$

Tiesė ir plokštuma susikerta.

b) x, y, z išraiškas įrašome į plokštumos lygtį: $2-3t+2-2t+4t+1=$ $=0$. Iš čia randame $t=5$.

Rasime susikirtimo taško koordinates:

$$x=2-3\cdot5,\ x=-13,$$

$$y=1-5,\ y=-4,$$

$$z=-4\cdot5,\ z=-20.$$

Taigi $M(-13;\ -4;\ -20)$. ▲

§ 14. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS STATMENUMAS

Tiesė ir plokštuma vadinamos *statmenomis* viena kitai (rašoma $l\perp\sigma$ arba $\sigma\perp l$), jeigu tiesė statmena kiekvienai tiesei, esančiai plokštumoje.

Aišku, kad statmenos viena kitai tiesė ir plokštuma susikerta.

Tiesė l yra statmena plokštumai σ tada ir tik tada, kai tos tiesės krypties vektorius $\mathbf{a}$ kolinearus plokštumos normalės vektoriui $\mathbf{n}$.

Taigi tiesės l ir plokštumos σ statmenumo būtina ir pakankama sąlyga yra

$$\mathbf{n}=\lambda\mathbf{a}, \tag{1}$$

arba, išreiškus koordinatėmis,

$$\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}. \tag{2}$$

1 teorema. *Egzistuoja vienintelė tiesė, kuri eina per duotąjį tašką ir yra statmena duotajai plokštumai.*

□ Teoremą įrodysime prieštaros metodu.

Sakykime, duota plokštuma σ, taškas $M\notin\sigma$, tiesė l, einanti per tašką M ir statmena plokštumai σ; plokštumos σ normalės vektorius $\mathbf{n}$, tiesės l krypties vektorius $\mathbf{a}$.

Tarkime, kad yra kita tiesė l_1 ($l_1\neq l$), kuri eina per tašką M ir yra statmena plokštumai σ.

Iš sąlygos $l\perp\sigma$ turime $\mathbf{n}=k\mathbf{a}$. Iš prielaidos $l_1\perp\sigma$ gauname $\mathbf{n}=k_1\mathbf{a}_1$. Iš čia

$$k\mathbf{a}=k_1\mathbf{a}_1.$$

Iš tos lygybės išplaukia, kad vektoriai **a** ir $\mathbf{a}_1$ yra kolinearūs, o tiesės l ir l_1 – lygiagrečios. Tai prieštarauja tam, kad tiesės l ir l_1 turi vienintelį bendrą tašką M. ■

Jeigu tiesė l ir plokštuma σ yra statmenos viena kitai, tai $\sin\varphi=1$ ir $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

□ Iš tikrųjų, šiuo atveju vektoriai **n** ir **a** yra kolinearūs, todėl

$$\sin\varphi=\frac{|\lambda a_1^2+\lambda a_2^2+\lambda a_3^2|}{\sqrt{\lambda^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=1.$$

1 uždavinys. Reikia įrodyti, kad tiesė

$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-3}{3}$$

ir plokštuma $4x-12y-6z+5=0$ yra statmenos.

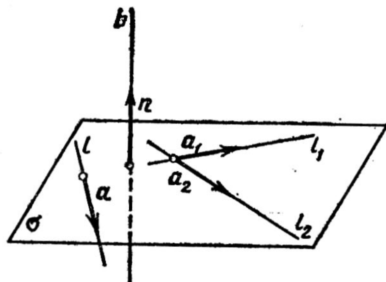
△ Iš sąlygos $\mathbf{n}=(4;\ -12;\ -6)$ ir $\mathbf{a}=(-2;\ 6;\ 3)$. Aišku, kad $(4;\ -12;\ -6)=-2\,(-2;\ 6;\ 3)$.

Kadangi (1) sąlyga išpildyta, tai tiesė ir plokštuma yra statmenos. ▲

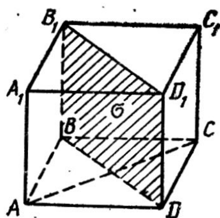
2 teorema (tiesės ir plokštumos statmenumo požymis). *Jeigu tiesė statmena kiekvienai iš dviejų susikertančių tiesių, esančių plokštumoje, tai tiesė ir plokštuma statmenos viena kitai.*

Sakykime, tiesės l_1 ir l_2 yra plokštumoje σ; be to, $l_1\cap l_2\neq\varnothing$ ir $l_1\neq l_2$; l – bet kuri plokštumos σ tiesė; tiesė b statmena tiesėms l_1 ir l_2. Įrodysime, kad $b\perp l$.

Tiesių b, l_1, l_2, l krypties vektorius pažymėkime **n**, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, **a** (17 pav.).



17 pav.



18 pav.

Kadangi $l_1\cap l_2\neq\varnothing$ ir $l_1\neq l_2$, tai vektoriai $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ nekolinearūs. Tada vektorių **a** galima tiesiškai išreikšti vektoriais $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ (I d., § 11), t. y.

$$\mathbf{a}=\alpha\,\mathbf{a}_1+\beta\,\mathbf{a}_2. \tag{3}$$

(3) lygybę skaliariškai padauginkime iš **n**. Pasirėmę skaliarinės daugybos distributyvumo savybe, gauname

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\alpha\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{n}+\beta\,\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{n}.$$

Kadangi $b\perp l_1$ ir $b\perp l_2$, tai $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{n}=0$ ir $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{n}=0$. Todėl $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=0$. Vadinasi, $b\perp l$.

l yra bet kuri plokštumos σ tiesė, todėl $b \perp \sigma$. ■

2 uždavinys. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Reikia įrodyti, kad tiesė AC statmena pjūvio BDD_1B_1 plokštumai (18 pav.).

△ Kadangi $ABCD$ – kvadratas, tai $(AC) \perp (BD)$. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – kubas, todėl $(DD_1) \perp \sigma_{ABCD}$, vadinasi, $(DD_1) \perp (AC)$. Toliau $(DD_1) \cap \cap (BD) \neq \varnothing$, $(DD_1) \subset \sigma_{BDD_1B_1}$, $(BD) \subset \sigma_{BDD_1B_1}$. Remiantis 2 teorema, $(AC) \perp \perp \sigma_{BDD_1B_1}$. ▲

§ 15. STATMENŲJŲ PLOKŠTUMŲ TEOREMOS

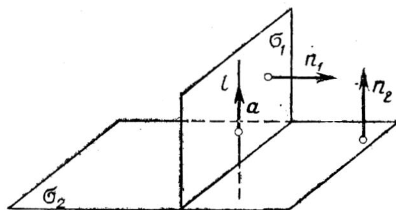
1 teorema (plokštumų statmenumo požymis). *Jeigu plokštuma eina per tiesę, statmeną kitai plokštumai, tai ji statmena tai plokštumai.*

□ Sakykime, tiesė l, kurios krypties vektorius $\mathbf{a}$, yra plokštumoje σ_1 ir statmena plokštumai σ_2; $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ – plokštumų σ_1 ir σ_2 normalės vektoriai (19 pav.). Įrodysime, kad $\sigma_1 \perp \sigma_2$.

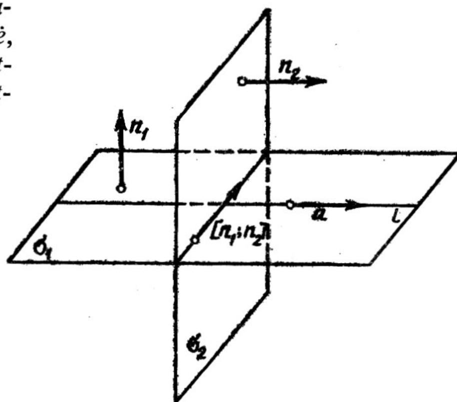
Kadangi $l \perp \sigma_2$, tai $\mathbf{a} = k\mathbf{n}_2$, o kadangi $l \subset \sigma_1$, tai $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$. Tada $(k\mathbf{n}_2) \times \times \mathbf{n}_1 = 0$, arba $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = 0$. Iš čia išplaukia, kad $\sigma_1 \perp \sigma_2$. ■

Šios teoremos sąlyga yra dviejų plokštumų statmenumo pakankama sąlyga. Įrodę 2 teoremą, įsitikinsime, kad ta sąlyga yra būtina.

2 teorema. *Jeigu dvi plokštumos statmenos viena kitai, tai tiesė, esanti vienoje plokštumoje ir statmena plokštumų sankirtai, yra statmena kitai plokštumai.*



19 pav.



20 pav.

□ Sakykime, $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ yra duotųjų viena kitai statmenų plokštumų σ_1 ir σ_2 vienetiniai normalės vektoriai, o $\mathbf{a}$ – tiesės l, kuri statmena plokštumų σ_1 ir σ_2 sankirtai ir yra, pavyzdžiui, plokštumoje σ_1, krypties vektorius (20 pav.). Tada $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}_1$, nes $l \subset \sigma_1$, ir $\mathbf{a} \perp [\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2]$, nes vektorius $[\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2]$ yra plokštumų σ_1 ir σ_2 susikirtimo tiesės krypties vektorius.

Akivaizdu, kad vektoriai $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ ir $[\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2]$ sudaro bazę. Todėl yra tokie skaičiai α, β ir γ, kad

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2 + \gamma[\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2].$$

Šią lygybę skaliariškai padauginę iš $\mathbf{n}_1$, gauname $\alpha = 0$. Analogiškai, padauginę iš $[\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2]$, gauname $\gamma = 0$.

Taigi $\mathbf{a}=\beta\,\mathbf{n}_2$. Todėl (žr. § 14) tiesė l statmena plokštumai σ_2. ■

Uždavinys. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ir nubrėžtas jo įstrižasis pjūvis BB_1D_1D (18 pav.). Reikia įrodyti, kad įstrižojo pjūvio plokštuma ir kubo pagrindo plokštuma yra statmenos viena kitai.

△ Plokštuma BB_1D_1D eina per tiesę D_1D, kuri statmena kubo pagrindo plokštumai. Remiantis 1 teorema, įstrižojo pjūvio plokštuma ir kubo pagrindo plokštuma yra statmenos. ▲

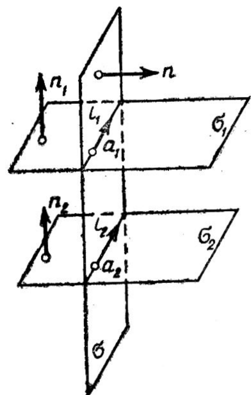
§ 16. TIESIŲ IR PLOKŠTUMŲ LYGIAGRETUMO RYŠYS SU STATMENUMU

Išnagrinėsime kai kurias savybes, kurios atskleidžia erdvės tiesių ir plokštumų tarpusavio ryšius.

1 teorema. *Jeigu dvi lygiagrečios plokštumos perkirstos trečiąja plokštuma, tai susikirtimo tiesės yra lygiagrečios.*

□ Sakykime, $\sigma_1 \| \sigma_2$ ir $\sigma \cap \sigma_1 = l_1$, $\sigma \cap \sigma_2 = l_2$. Įrodysime, kad $l_1 \| l_2$.

Plokštumų σ_1, σ_2 ir σ normalės vektorius pažymėkime $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ ir $\mathbf{n}$, o tiesių l_1 ir l_2 krypties vektorius – $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ (21 pav.).



21 pav.

Kadangi $l_1 \subset \sigma_1$ ir $l_1 \subset \sigma$, tai $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{n}$. Todėl tiesės l_1 krypties vektoriumi galima laikyti vektorių $[\mathbf{n}_1;\, \mathbf{n}]$.

Analogiškai, tiesės l_2 krypties vektoriumi galima laikyti vektorių $[\mathbf{n}_2;\, \mathbf{n}]$. Kadangi $\sigma_1 \| \sigma_2$, tai $\mathbf{n}_2 = k\mathbf{n}_1$. Taigi $\mathbf{a}_2 = [\mathbf{n}_2;\, \mathbf{n}] = k\,[\mathbf{n}_1;\, \mathbf{n}] = k\mathbf{a}_1$. Todėl $l_2 \| l_1$. ■

2 teorema. *Dvi tiesės, statmenos tai pačiai plokštumai, yra lygiagrečios.*

□ Jeigu $\mathbf{n}$ – duotosios plokštumos normalės vektorius, tai iš sąlygų $l_1 \perp \sigma$ ir $l_2 \perp \sigma$ išplaukia, kad vektorių $\mathbf{n}$ galima laikyti kiekvienos tų tiesių krypties vektoriumi, o iš to išplaukia, kad $l_1 \| l_2$. ■

3 teorema (atvirkštinė). *Jeigu viena iš dviejų lygiagrečių tiesių statmena plokštumai, tai ir kita tiesė statmena tai plokštumai.*

□ Sakykime, $l_1 \| l_2$, $l_1 \perp \sigma$. Įrodysime, kad $l_2 \perp \sigma$. Tiesių l_1 ir l_2 krypties vektorius pažymėkime $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$, o plokštumos σ normalės vektorių – $\mathbf{n}$ (22 pav.).

Sąlygoje duota, kad $l_1 \perp \sigma$ ir $l_1 \| l_2$, todėl (§ 14)

$$\mathbf{n} = k\,\mathbf{a}_1 \text{ ir } \mathbf{a}_1 = \lambda\,\mathbf{a}_2.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{n} = k\,(\lambda\,\mathbf{a}_2) = k\,\lambda\,\mathbf{a}_2,$$

tai rodo, kad $l_2 \perp \sigma$. ■

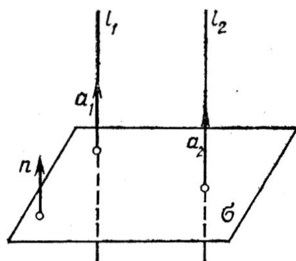
4 teorema. *Jeigu tiesė yra lygiagreti kiekvienai iš dviejų susikertančių plokštumų, tai ji lygiagreti plokštumų susikirtimo tiesei.*

□ Sakykime, $l = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $l_1 \| \sigma_1$, $l_1 \| \sigma_2$. Įrodysime, kad $l_1 \| l$.

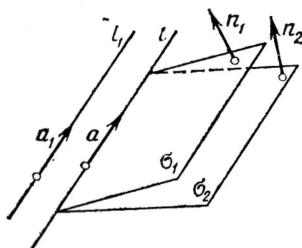
Tiesės l_1 krypties vektorių pažymėkime $\mathbf{a}_1$, plokštumų σ_1 ir σ_2 normalės vektorius – $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$ (23 pav.).

Vektorius $\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2]$ yra tiesės l krypties vektorius.

Sąlygoje duota, kad $l_1 \| \sigma_1$, ir $l_1 \| \sigma_2$. Todėl $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{n}_2$, o tada $\mathbf{a}_1= =\lambda [\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2]$. Vadinasi, $\mathbf{a}_1=\lambda \mathbf{a}$, o iš čia išplaukia, kad $l_1 \| l$. ■



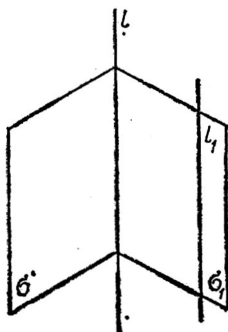
22 pav.



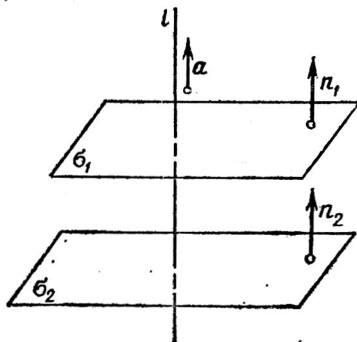
23 pav.

Išvada. *Jeigu plokštuma eina per tiesę, lygiagrečią kitai plokštumai, ir kerta tą plokštumą, tai plokštumų susikirtimo tiesė yra lygiagreti duotajai tiesei* (24 pav.).

5 teorema. *Tiesė, statmena vienai iš dviejų lygiagrečių plokštumų, yra statmena ir kitai plokštumai.*



24 pav.



25 pav.

□ Sakykime, tiesė l, kurios krypties vektorius $\mathbf{a}$, yra statmena plokštumai σ_1, kurios normalės vektorius $\mathbf{n}_1$; plokštuma σ_1 yra lygiagreti plokštumai σ_2, kurios normalės vektorius $\mathbf{n}_2$ (25 pav.). Įrodysime, kad $l \perp \sigma_2$.

Kadangi $l \perp \sigma_1$, tai $\mathbf{a}=k\mathbf{n}_1$. Kadangi $\sigma_1 \| \sigma_2$, tai $\mathbf{n}_1=\lambda \mathbf{n}_2$. Iš čia $\mathbf{a}= =k(\lambda \mathbf{n}_2)=k\lambda \mathbf{n}_2$.

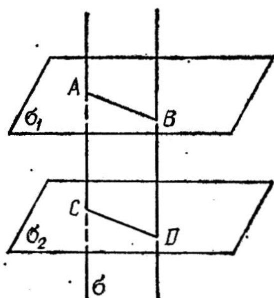
Paskutinioji lygybė rodo, kad $l \perp \sigma_2$. ■

6 teorema (atvirkštinė). *Dvi plokštumos, statmenos tai pačiai tiesei, yra lygiagrečios.* (Įrodykite savarankiškai.)

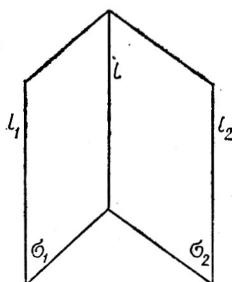
1 uždavinys. Taškai A ir B priklauso plokštumai σ_1, taškai C ir D – plokštumai σ_2. $(AC) \perp \sigma_1$, $(BD) \perp \sigma_2$ ir $\sigma_1 \| \sigma_2$ (26 pav.). Reikia įrodyti, kad $[AC] \cong [BD]$.

△ Iš $(AC)\perp\sigma_1$ ir $\sigma_1\|\sigma_2$ išplaukia $(AC)\perp\sigma_2$. Iš $(BD)\perp\sigma_2$, $(AC)\perp\sigma_2$, remiantis 2 teorema, išplaukia $(AC)\|(BD)$. Per tieses AC ir BD išveskime plokštumą σ. Tos plokštumos susikirtimo su plokštumomis σ_1 ir σ_2 tiesės yra AB ir CD.

Remiantis 1 teorema, $(AB)\|(CD)$. Tačiau tada keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, todėl $[AC]\cong[BD]$. ▲



26 pav.



27 pav.

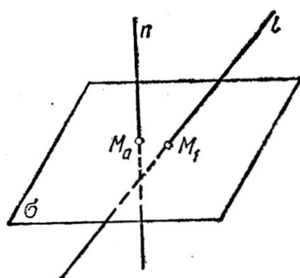
2 uždavinys. Per kiekvieną iš dviejų lygiagrečių tiesių išvesta plokštuma. Tos plokštumos susikerta. Reikia įrodyti, kad susikirtimo tiesė yra lygiagreti kiekvienai duotajai tiesei.

△ Sakykime, $l_1\subset\sigma_1$, $l_2\subset\sigma_2$, $l_1\|l_2$, $\sigma_1\cap\sigma_2=l$ (27 pav.). Įrodysime, kad $l\|l_1$ ir $l\|l_2$. $l_1\|l_2$, $l_2\subset\sigma_2$, todėl $l_1\|\sigma_2$ (12 paragrafo teorema). $\sigma_2\cap\sigma_1=l$. Vadinasi, $l_1\|l$ (4 teoremos išvada). Kadangi $l_1\|l_2$ (duota sąlygoje), $l_1\|l$, tai $l\|l_2$ (8 paragrafo teorema). ▲

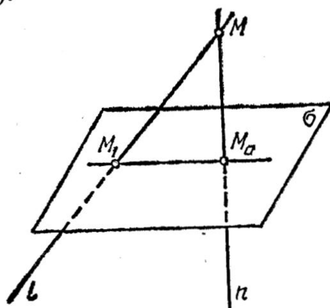
§ 17. STATMUO IR PASVIROJI PLOKŠTUMAI

Tiesė, statmena plokštumai, vadinama *statmeniu* tai plokštumai. Tiesė, kertanti plokštumą, bet nestatmena jai, vadinama *pasvirąja* tai plokštumai.

Statmens n ir plokštumos σ susikirtimo taškas (28 pav.) vadinamas *statmens pagrindu* ($M_0=n\cap\sigma$), o plokštumos ir pasvirosios l susikirtimo taškas – *pasvirosios pagrindu* ($M_1=l\cap\sigma$).



28 pav.



29 pav.

Sakykime, statmuo n ir pasviroji l turi bendrą tašką M (29 pav.). Tada tiesė M_0M_1 vadinama pasvirosios l *projekcija* plokštumoje σ.

Statmuo ir pasviroji turi šitokias savybes (30 pav.):

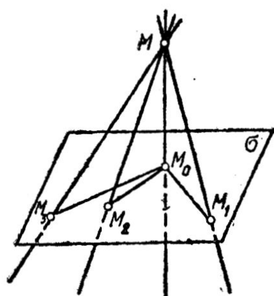
1) kad ir kokia būtų pasviroji plokštumai σ,

$$|MM_1|>|MM_0|;$$

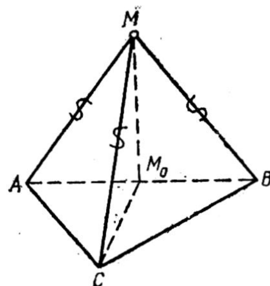
2) jeigu (MM_1) ir (MM_2) – pasvirosios plokštumai σ ir $|M_0M_1|=|M_0M_2|$, tai $|MM_1|=|MM_2|$;

3) jeigu (MM_1) ir (MM_3) – pasvirosios plokštumai σ ir $|M_0M_1|<|M_0M_3|$, tai $|MM_1|<|MM_3|$.

Teisingi ir tiems teiginiams atvirkštiniai teiginiai.



30 pav.



31 pav.

1 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC statiniai lygūs 4 cm ir 3 cm. Taškas M yra $\sqrt{6}$ cm nuo trikampio ABC plokštumos ir vienodai nutolęs nuo visų jo viršūnių. Reikia rasti taško M atstumą iki trikampio viršūnių.

△ Atstumas nuo taško M iki trikampio ABC plokštumos yra statmens tai plokštumai, išvesto per tašką M, atkarpos ilgis, o atstumai nuo taško M iki viršūnių – atitinkamų pasvirųjų atkarpų ilgiai (31 pav.). Kadangi $|MA|=|MB|=|MC|$, tai tų pasvirųjų projekcijų atitinkamos atkarpos yra vienodo ilgio. Todėl statmens MM_0 pagrindas yra trikampio ABC įžambinės vidurio taškas. Iš △ ABC randame $|AB|=\sqrt{16+9}=5$ (cm). Iš △ MM_0A randame $|MA|=\sqrt{6{,}25+6}=3{,}5$ (cm). ▲

Teorema (trijų statmenų). *Kad plokštumoje esanti tiesė būtų statmena pasvirajai, būtina ir pakanka, kad ta tiesė būtų statmena pasvirosios projekcijai.*

□ Sakykime, $l\perp\sigma$, l_1 – pasviroji plokštumai σ, l_2 – jos projekcija, o m – plokštumoje σ esanti tiesė.

Tiesių l, l_1, l_2 ir m krypties vektorius pažymėkime $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ir $\mathbf{b}$ (32 pav.).

Pakankamumas. Tarkime, kad $m\perp l_2$. Įrodysime, kad $m\perp l_1$. Tiesės l ir l_1 nustato plokštumą σ_1, kurioje yra ir tiesė l_2. Vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{a}_1$ nekolinearūs, todėl

$$\mathbf{a}_2=\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{a}_1;\ \text{be to, } \beta\neq 0.$$

Tą lygybę skaliariškai padauginę iš **b**, gauname

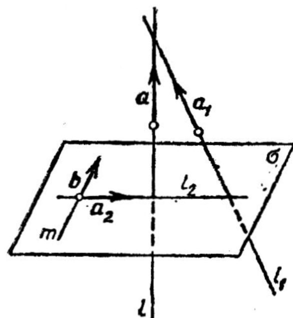
$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} = \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \beta \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}. \qquad (1)$$

Kadangi $l \perp \sigma$ ir $m \perp l_2$, tai $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ir $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} = 0$. Todėl $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} = 0$. Tai reiškia, kad $m \perp l_1$.

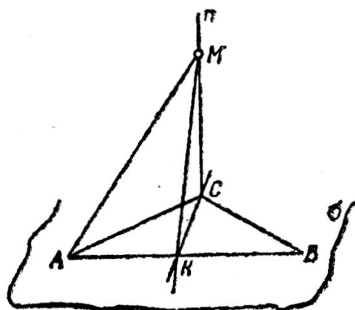
Būtinumas. Tarkime, kad $m \perp l_1$. Įrodysime, kad $m \perp l_2$.

Pasirėmę sąlygomis $l \perp \sigma$, $m \perp l_1$, iš (1) lygybės gauname $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} = 0$. Tai reiškia, kad $m \perp l_2$. ■

2 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC statiniai lygūs 4 cm ir 3 cm. Per trikampio stačiojo kampo viršūnę C išvestas statmuo n plokštumai



32 pav.



33 pav.

ABC. Reikia rasti atstumą nuo taško $M \in n$ iki trikampio įžambinės; $|MC| = 2{,}6$ cm.

△ Ieškomasis atstumas yra statmens MK trikampio ABC įžambinei atkarpos ilgis (33 pav.). Taigi $(MK) \perp (AB)$.

Išveskime tiesę CK. Remiantis teorema, $(CK) \perp (AB)$. Iš △ ABC randame $|AB| = 5$ cm, $|CK| = 2{,}4$ cm. Iš △ MCK randame $|MK| = \sqrt{5{,}76 + 6{,}76} = \sqrt{12{,}52} \approx 3{,}5$ (cm). ▲

§ 18. ATSTUMAS NUO TAŠKO IKI PLOKŠTUMOS

Sakykime, duota plokštuma σ ir taškas $M_1 \notin \sigma$. *Atstumu d nuo taško M_1 iki plokštumos* σ laikomas atkarpos $M_1 M_2$ ilgis; čia M_2 – statmens plokštumai σ, išvesto per tašką M_1, pagrindas.

Sakykime, reikia rasti atstumą nuo duotojo taško M_1 (jo spindulys vektorius yra $\mathbf{r}_1$) iki plokštumos σ, kurios normalinė lygtis yra $\overrightarrow{M_0 M} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$ arba $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = 0$; čia $|\mathbf{n}_0| = 1$.

Pastebėsime, kad vektorius $\overrightarrow{M_2 M_1}$ yra kolinearus vienetiniam vektoriui $\mathbf{n}_0$, t. y. $\overrightarrow{M_2 M_1} = k\mathbf{n}_0$. Kadangi $|\mathbf{n}_0| = 1$, tai $d = |\overrightarrow{M_2 M_1}| = |k|$.

Rasime vektorių $\overrightarrow{M_2M_1}$ ir $\mathbf{n}_0$ skaliarinę sandaugą. Turime (34 pav.)

$$\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\mathbf{n}_0=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{n}_0=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{n}_0=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0+$$
$$+(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{n}_0.$$

Kadangi taškai M_2 ir M_0 priklauso plokštumai σ, tai $(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{n}_0=0$. Todėl

$$\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\mathbf{n}_0=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0.$$

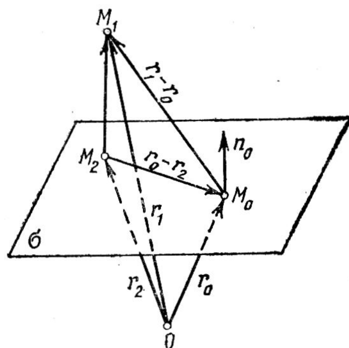
Tada

$$d=|\overrightarrow{M_2M_1}|=|\overrightarrow{M_2M_1}|\cdot|\mathbf{n}_0|=|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\mathbf{n}_0|=|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0|.$$

Taigi

$$d=|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0|. \tag{1}$$

Išnagrinėję gautąją d išraišką, matome, kad atstumas nuo taško iki plokštumos yra lygus moduliui reiškinio, kuris gaunamas į plokštumos normalinės lygties kairiąją pusę įrašius to taško spindulį vektorių $\mathbf{r}_1$.



34 pav.

1 uždavinys. Plokštuma σ, kurios normalės vienetinis vektorius $\mathbf{n}_0=\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, eina per tašką M_0, kurio spindulys vektorius $\mathbf{r}_0=(2;\ 1;\ 3)$. Reikia rasti taško M_1 atstumą iki plokštumos σ; to taško spindulys vektorius $\mathbf{r}_1=(-4;\ 5;\ 1)$.

△ Ieškomąjį atstumą d rasime, į plokštumos lygtį $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0=0$ įrašę taško M_1 spindulį vektorių.

Kadangi $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0=(-6;\ 4;\ -2)$, o $\mathbf{n}_0=\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, tai

$$d=|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0|=\left|-6\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{2}{3}-2\cdot\frac{2}{3}\right|=6. \ ▲$$

Sakykime, plokštuma σ duota lygtimi

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

Rasime atstumą nuo taško $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ iki plokštumos σ. Aišku, vienetinis vektorius

$$\mathbf{n}_0=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

yra plokštumos σ normalės vektorius.

Sakykime, $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)\in\sigma$. Tada

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0=(x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0)$$

ir, remiantis (1) formule,

$$d=|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}_0|=\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(x_1-x_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(y_1-y_0)+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(z_1-z_0)\right|=$$

$$=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-(Ax_0+By_0+Cz_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Kadangi $M_0\in\sigma$, tai $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, arba $D=-(Ax_0+$ $+By_0+Cz_0)$.

Vadinasi, atstumas nuo taško $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ iki plokštumos σ, duotos (2) lygtimi, apskaičiuojamas pagal formulę

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (3)$$

2 uždavinys. Reikia rasti atstumą nuo taško $M_1(5;\ 3;\ 8)$ iki plokštumos $x-2y+2z-3=0$.

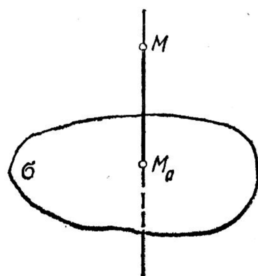
△ Taikome (3) formulę:

$$d=\frac{|1\cdot5+(-2)\cdot3+2\cdot8-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{12}{3}=4. \ ▲$$

§ 19. FIGŪROS STATMENOJI PROJEKCIJA

Nagrinėkime kurią nors plokštumą σ ir tašką M. *Taško M statmenąja projekcija* plokštumoje σ vadinamas statmens plokštumai σ, išvesto per tašką M, pagrindas M_0 (35 pav.). Šiuo atveju plokštuma σ vadinama *projekcijų plokštuma.*

Jeigu taškas $M\in\sigma$, tai $M_0=M$. Remiantis 14 paragrafo 1 teorema, egzistuoja vienintelis statmuo plokštumai σ, einantis per duotąjį tašką. Todėl, kad ir koks būtų erdvės taškas M, egzistuoja vienintelė statmenoji to taško projekcija duotoje plokštumoje.



35 pav.

Toliau, kad būtų trumpiau, kalbėdami apie statmenąsias projekcijas, žodį „statmenoji" praleisime.

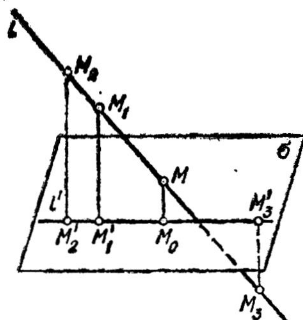
Tiesės l projekcija plokštumoje σ vadinama tos tiesės taškų projekcijų plokštumoje σ aibė.

Išnagrinėsime kai kurias tiesių projekcijų plokštumoje savybes.

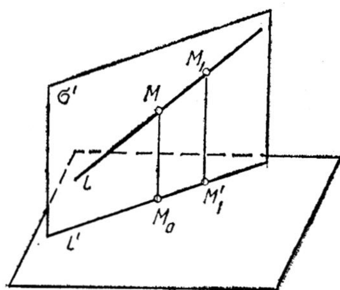
1. Jeigu tiesė l nėra statmena projekcijų plokštumai, tai jos projekcija toje plokštumoje yra tiesė (36 pav.).

□ Sakykime, M_0 – taško $M \in l$ projekcija plokštumoje σ (37 pav.). Per tašką M_0 ir tiesę l galima išvesti plokštumą (§ 3); ją pažymėkime σ'. Remiantis 15 paragrafo 1 teorema, plokštumos σ ir σ' yra statmenos. Sakykime, $l' = \sigma \cap \sigma'$.

Imkime tašką $M_1 \in l$ ir per jį plokštumoje σ' išveskime tiesę, statmeną tiesei l'. Remiantis 15 paragrafo 2 teorema, $(M_1M_1') \perp \sigma$. Vadinasi, M_1' – taško M_1 projekcija plokštumoje σ. Taigi kiekvieno tiesės l taško projekcija priklauso tiesei l'.



36 pav.

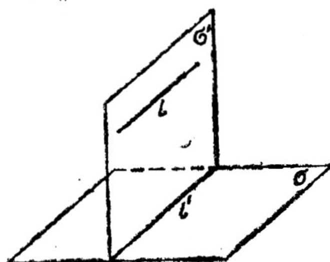


37 pav.

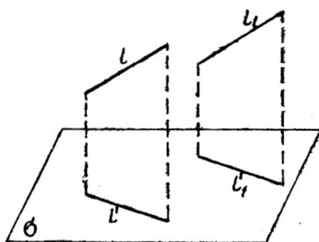
Analogiškai įrodoma, kad kiekvienas tiesės l' taškas yra tam tikro tiesės l taško projekcija. ■

Iš čia išplaukia, kad spindulio projekcija yra spindulys, atkarpos projekcija – atkarpa (kai spindulys ir atkarpa nėra statmeni plokštumai σ). Jeigu l – statmuo plokštumai σ, tai l projekcija plokštumoje σ yra taškas (tiesės l ir plokštumos σ susikirtimo taškas).

2. Jeigu tiesė l yra lygiagreti projekcijų plokštumai ir l' – jos projekcija, tai $l \parallel l'$.



38 pav.



39 pav.

□ Iš tikrųjų, per tieses l ir l' išveskime plokštumą σ' (38 pav.). Remiantis 16 paragrafo 4 teoremos išvada, $l' \parallel l$. ■

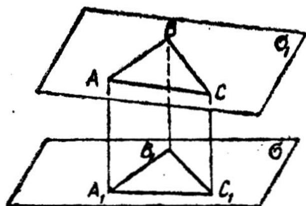
Iš čia išplaukia, kad projekcijų plokštumai lygiagrečios atkarpos projekcija yra jai kongruenti atkarpa.

3. Dviejų lygiagrečių tiesių, nestatmenų projekcijų plokštumai, projekcijos yra lygiagrečios tiesės (39 pav.).

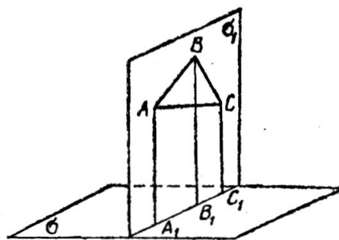
□ Sakykime, plokštuma σ_1 eina per tiesę l ir jos projekciją l', o σ_2 – per l_1 ir l_1'. Taikant 5 paragrafo 2 teoremą, lengva įrodyti, kad $\sigma_1 \| \sigma_2$ (įrodykite). Tačiau tada, remiantis 16 paragrafo 1 teorema, tiesės l' ir l_1' yra lygiagrečios. ■

Iš čia išplaukia, kad susikertančių tiesių, nesančių plokštumai σ statmenoje plokštumoje, projekcijos yra susikertančios tiesės.

4. Dviejų lygiagrečių atkarpų (arba vienoje tiesėje esančių atkarpų) projekcijų ilgių santykis yra lygus projektuojamųjų atkarpų ilgių santykiui.



40 pav.



41 pav.

□ Tarkime, kad duotosios atkarpos nėra vienoje tiesėje. Lygiagrečiuoju postūmiu, nekeičiant atkarpos ilgio, vieną jų galima atvaizduoti kitos atkarpos tiesėje. Kiekviena tiesė ir jos statmenoji projekcija yra vienoje plokštumoje. Todėl teiginys teisingas, remiantis proporcingųjų atkarpų teorema iš VII klasės planimetrijos kurso. ■

Figūros F projekcija plokštumoje σ vadinama figūros F taškų projekcijų toje plokštumoje aibė.

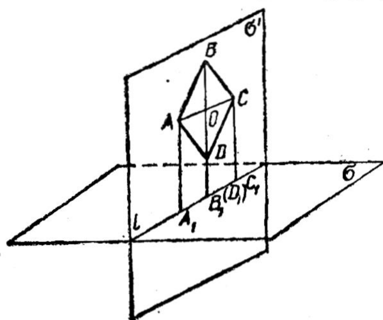
1 uždavinys. Reikia pavaizduoti trikampio ABC projekciją plokštumoje σ.

△ Jeigu $\triangle ABC$ plokštuma (σ_1) nėra statmena plokštumai σ, tai trikampio ABC projekcija toje plokštumoje yra tam tikras trikampis $A_1B_1C_1$ (atkarpos projekcija yra atkarpa) (40 pav.).

Jeigu $\sigma_1 \perp \sigma$, tai trikampio ABC projekcija plokštumoje σ yra atkarpa A_1C_1 (41 pav.).

Jeigu $\sigma_1 \| \sigma$, tai $\triangle ABC$ projekcija plokštumoje σ yra

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC. \ \blacktriangle$$



42 pav.

2 uždavinys. Viena rombo $ABCD$ įstrižainė yra statmena plokštumai σ. Kokia yra rombo projekcija toje plokštumoje?

△ Sakykime, $[BD] \perp \sigma$ (42 pav.). Rombas – plokščioji figūra, todėl, remiantis 15 paragrafo 1 teorema, rombo $ABCD$ plokštuma (σ') yra statmena plokštumai σ.

Sakykime, $\sigma' \cap \sigma = l$. Tada įstrižainės AC projekcija A_1C_1 yra tiesėje l.

$[AC]\perp[BD]$ (rombo savybė); sąlygoje duota, kad $(BD)\perp\sigma$; iš plokštumai statmenos tiesės apibrėžimo išplaukia, kad $(BD)\perp l$. Tada taškų B, D bei įstrižainių susikirtimo taško O projekcija yra atkarpos A_1C_1 taškas $B_1(D_1)$. Todėl rombo $ABCD$ projekcija plokštumoje σ yra atkarpa A_1C_1. ▲

3 uždavinys. Reikia rasti tiesės

$$l: \frac{x-1}{9}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{-7} \tag{1}$$

projekcijos plokštumoje σ lygtį. Plokštumos σ lygtis yra

$$2x-y-3z+6=0. \tag{2}$$

△ Sakykime, l' – tiesės l projekcija plokštumoje σ. Per l ir l' išveskime plokštumą σ'. Sakykime, $M(x;\ y;\ z)\in\sigma'$. Taškas $M_1(1;\ -1;\ 0)$ yra tiesėje l, nes jo koordinatės tenkina tiesės lygtis. Tada vektorius $\overrightarrow{M_1M}=(x-1;\ y+1;\ z)$ yra lygiagretus plokštumai σ'. Be to, duotosios tiesės krypties vektorius $\mathbf{a}=(9;\ -4;\ -7)$ ir plokštumos σ normalės vektorius $\mathbf{n}=(2;\ -1;\ -3)$ irgi lygiagretūs plokštumai σ'. Remiantis trijų vektorių $\overrightarrow{M_1M}$, $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{n}$ komplanarumo sąlyga (žr. § 1),

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 9 & -4 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Iš čia gauname plokštumos σ' lygtį

$$5x+13y-z+8=0. \tag{3}$$

Ieškomoji tiesė yra plokštumų σ ir σ' sankirta, todėl ją apibūdina šitokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} 2x-y-3z+6=0, \\ 5x+13y-z+8=0. \end{cases}$$ ▲

§ 20. ERDVINIŲ FIGŪRŲ VAIZDAVIMAS

1. Erdvinėms figūroms vaizduoti plokštumoje taikomas projektavimo metodas.

Vienas patogių būdų figūroms vaizduoti yra *kabinetinė projekcija.*

Nagrinėkime erdvės koordinačių sistemą, kurią apibūdina taškas O ir vienetinių poromis statmenų vektorių **i**, **j**, **k** sistema (I d. § 14) (43 pav.).

Plokštumas xOy, xOz ir yOz laikysime projekcijų plokštumomis.

Vaizduojant figūras šioje sistemoje, laikomasi tokių taisyklių:

1) brėžinyje kampo xOy didumas lygus 135°, kampo yOz didumas lygus 90°;

2) atkarpos, lygiagrečios ašims Oy ir Oz, vaizduojamos neiškreiptos (to paties ilgio atkarpomis);

3) atkarpos, lygiagrečios ašiai Ox, vaizduojamos du kartus mažesnio ilgio atkarpomis.

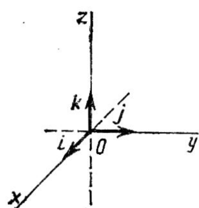
Figūros kabinetinė projekcija turi visas statmenosios projekcijos savybes.

1 uždavinys. Kabinetine projekcija reikia pavaizduoti taisyklingąją trikampę prizmę, kurios pagrindo kraštinė lygi 2 cm, o aukštinė 3 cm.

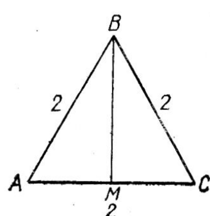
$\triangle$ Nubrėžkime kabinetinės projekcijos koordinačių sistemą. Sakykime, $[BM]$ yra $\triangle ABC$ aukštinė (44 pav.). Pasirinkime tokią prizmės pagrindo padėtį plokštumoje xOy, kad $M=O$, o $[MB]\subset Ox$. Tada, remiantis 3 kabinetinės projekcijos savybe, atkarpos MB projekcijos ilgis bus lygus $\frac{1}{2}|MB|$. Kadangi $[AC]\subset Oy$, tai jos projekcijos ilgis lygus $|AC|$ (2 savybė). Brėžinyje taškas M yra $[AC]$ vidurio taškas.

Taigi nubrėžėme prizmės apatinio pagrindo ($\triangle ABC$) vaizdą.

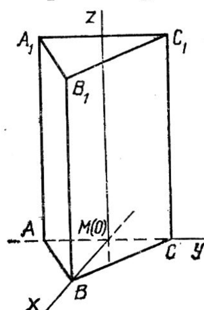
Kadangi $ABCA_1B_1C_1$ – taisyklingoji prizmė, tai jos šoninės briaunos yra statmenos plokštumai xOy, todėl atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 yra lygiagrečios ašiai Oz. Remiantis 2 savybe, jos vaizduojamos to paties ilgio atkarpomis. Sujungę taškus A_1, B_1 ir C_1, gauname ieškomąjį prizmės $ABCA_1B_1C_1$ vaizdą (45 pav.). ▲



43 pav.



44 pav.



45 pav.

2. Dabar išnagrinėsime, kaip braižomi paprasčiausių erdvinių kūnų (gretasienio ir piramidės) pjūviai, gauti juos kertant plokštuma.

2 uždavinys. Gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$ perkirstas plokštuma, einančia per taškus M, N ir K; $M\in[AA_1]$, $N\in[AD]$, $K\in[CC_1]$. Reikia nubrėžti gautojo pjūvio vaizdą.

$\triangle$ Gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pavaizduokime kabinetine projekcija. Taškai M ir N priklauso vienai plokštumai – sienos AA_1D_1D plokštumai. Juos sujunkime atkarpa MN. Atkarpa MN yra kertančios plokštumos pėdsakas sienoje AA_1D_1D (jos ir gretasieno sienos sankirta).

Iš sąlygos išplaukia, kad taškas K priklauso pjūvio plokštumai ir sienos DD_1C_1C plokštumai. Tiesė MN yra sienos AA_1D_1D plokštumoje. Ta plokštuma kerta sienos DD_1C_1C plokštumą; susikirtimo tiesė D_1D. Tiesė MN irgi kerta sienos DD_1C_1C plokštumą, o susikirtimo taškas yra plokštumų susikirtimo tiesėje D_1D. Tas taškas priklauso ir kertančiajai plokštumai, nes joje yra tiesė MN; be to, jis priklauso ir sienos DD_1C_1C plokštumai. Todėl tas taškas yra tiesių MN ir D_1D susikirtimo taškas. Jį pažymėkime P_1 (46 pav.). Dabar galime nubrėžti kertančios plokštumos pėdsaką sienoje DD_1C_1C. Kadangi taškai P_1 ir K priklauso tos sienos plokštumai, tai brėžiame tiesę P_1K.

Tiesė P_1K kerta briauną DC taške $P_2=(P_1K)\cap(CD)$. Atkarpa P_2K – kertančios plokštumos pėdsakas sienoje DD_1C_1C.

Duotasis taškas N ir gautasis taškas P_2 priklauso sienos $ABCD$ plokštumai, todėl $[NP_2]$ – dar vienas kertančios plokštumos pėdsakas gretasienio paviršiuje.

Analogiškai samprotaudami, turime $(NP_2)\subset\sigma_{ABCD}$ (sienos $ABCD$ plokštumoje) ir (NP_2) yra kertančioje plokštumoje. Taškas K priklauso $\sigma_{BB_1C_1C}$ ir kertančiajai plokštumai. Tada

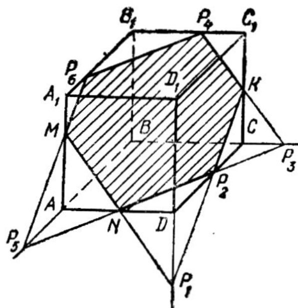
$$\sigma_{ABCD}\cap\sigma_{BB_1C_1C}=(BC),\quad (NP_2)\cap(BC)=P_3.$$

Taškai P_3 ir K priklauso vienai plokštumai – sienos BB_1C_1C plokštumai. Todėl galime nubrėžti tiesę P_3K ir rasti tašką $P_4=(P_3K)\cap(B_1C_1)$.

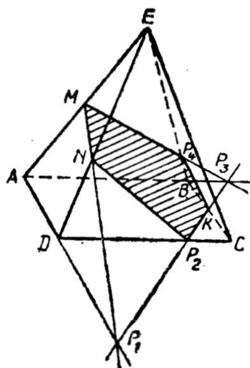
Atkarpa $[KP_4]$ – kertančios plokštumos pėdsakas sienoje BB_1C_1C.

Norėdami rasti kertančios plokštumos pėdsakus plokštumose $\sigma_{AA_1B_1B}$ ir $\sigma_{A_1B_1C_1D_1}$, darome šitaip:

$$(P_2N)\cap(BA)=P_5,\quad (P_5M)\cap(A_1B_1)=P_6.$$



46 pav.



47 pav.

Atkarpa MP_6 – pėdsakas sienoje AA_1B_1B; atkarpa P_6P_4 – pėdsakas sienoje $A_1B_1C_1D_1$.

Ieškomasis pjūvis – šešiakampis $MNP_2KP_4P_6$. ▲

3 uždavinys. Reikia nubrėžti pjūvį, gautą taisyklingąją keturkampę piramidę perkirtus plokštuma σ, einančia per taškus M, N, K (M yra $[AE]$ vidurio taškas, $N\in[DE]$, $|EN|:|ND|=2:1$, K yra $[BC]$ vidurio taškas).

△ Duotąją piramidę pavaizduokime kabinetine projekcija (47 pav.). Vieną pėdsaką – atkarpą MN – randame iš karto. Norėdami rasti kitus plokštumos σ pėdsakus piramidės paviršiuje, braižome šitaip:

1) $(MN)\cap(AD)=P_1$;

2) $(P_1K)\cap(DC)=P_2$; $[NP_2]$, $[P_2K]$ – pėdsakai;

3) $(P_2K)\cap(AB)=P_3$;

4) $(P_3M)\cap(EB)=P_4$; $[KP_4]$, $[P_4M]$ – pėdsakai.

Ieškomasis pjūvis – penkiakampis MNP_2KP_4. ▲

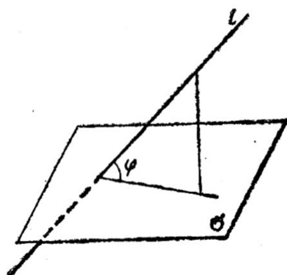
§ 21. DAUGIAKAMPIO PROJEKCIJOS PLOTAS

13 paragrafe lygybe $\psi = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$ apibrėžėme kampą $\varphi\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ tarp tiesės l ir plokštumos σ; čia ψ – kampas tarp plokštumos σ normalės vektoriaus ir tiesės l krypties vektoriaus.

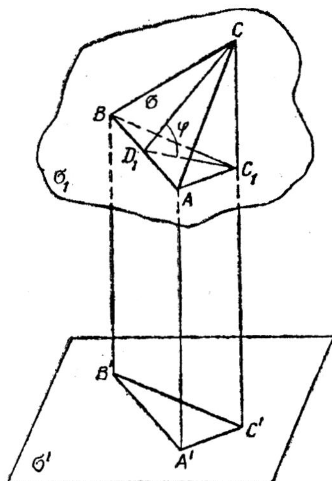
Sprendžiant daugelį uždavinių, patogesnis kitas apibrėžimas (jis ekvivalentiškas pirmajam).

Kampas tarp tiesės ir plokštumos yra lygus kampui tarp tiesės ir jos projekcijos plokštumoje (48 pav.). Įrodykite.

Teorema. *Daugiakampio statmenosios projekcijos plokštumoje plotas lygus projektuojamojo daugiakampio plotui, padaugintam iš kosinuso kampo tarp daugiakampio plokštumos ir projekcijos plokštumos.*



48 pav.



49 pav.

□ Kiekvieną daugiakampį galima padalyti į trikampius, kurių plotų suma yra daugiakampio plotas. Todėl teoremą pakanka įrodyti trikampiui.

Sakykime, $\triangle ABC$ projektuojamas į plokštumą σ'. Išnagrinėkime du atvejus: a) viena $\triangle ABC$ kraštinė yra lygiagreti plokštumai σ'; b) nė viena $\triangle ABC$ kraštinė nėra lygiagreti plokštumai σ'.

Išnagrinėsime pirmąjį atvejį. Sakykime, $[AB] \| \sigma'$.

Per (AB) išveskime plokštumą $\sigma_1 \| \sigma'$ ir $\triangle ABC$ statmenai suprojektuokime į σ_1 ir σ' (49 pav.). Gausime $\triangle ABC_1$ ir $\triangle A'B'C'$. Remiantis projekcijos savybe, $\triangle ABC_1 \cong \triangle A'B'C'$, todėl

$$S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle A'B'C'}. \qquad (1)$$

Išveskime $[CD_1] \perp [BA]$ ir atkarpą D_1C_1. Tada $\widehat{CD_1C_1} = \varphi$ yra kampas tarp tiesės CD_1 ir plokštumos σ_1;

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |C_1D_1| = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD_1| \cdot \cos\varphi =$$

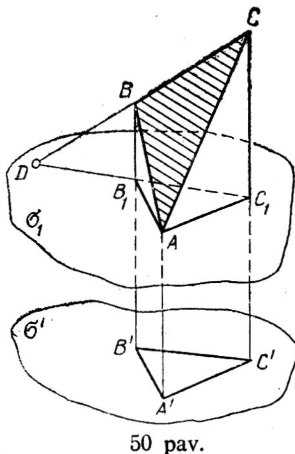
$$= S_{\triangle ABC} \cos\varphi. \qquad (2)$$

Sakykime, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ ir $\mathbf{n}_1$ — plokštumų σ, σ' ir σ_1 normalės vektoriai. Kadangi $\sigma_1 \| \sigma'$, tai $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}'$. Nesunku įžvelgti, kad $(\widehat{\sigma'; \sigma}) = (\widehat{\mathbf{n}'; \mathbf{n}}) = (\widehat{\mathbf{n}_1; \mathbf{n}}) = \varphi$, todėl iš (1) ir (2) išplaukia, kad $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cos \varphi$.

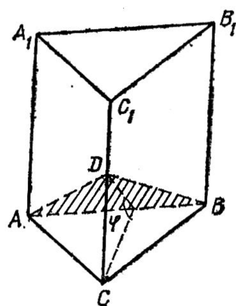
Išnagrinėsime antrąjį atvejį. Per $\triangle ABC$ viršūnę, kurios atstumas iki plokštumos σ' yra mažiausias (sakykime, tokia viršūnė yra A), išveskime plokštumą $\sigma_1 \| \sigma'$. $\triangle ABC$ suprojektuokime į plokštumas σ_1 ir σ' (50 pav.). Sakykime, tos projekcijos yra $\triangle AB_1C_1$ ir $\triangle A'B'C'$. Jeigu $(BC) \cap \sigma_1 = D$, tai

$$S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle ADC_1} - S_{\triangle ADB_1} = S_{\triangle ADC} \cos \varphi - S_{\triangle ADB} \cos \varphi =$$
$$= (S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ADB}) \cos \varphi = S_{\triangle ABC} \cos \varphi. \blacksquare$$

Uždavinys. Per taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kuri su prizmės pagrindo plokštuma sudaro kampą $\varphi = 30°$. Reikia rasti gautojo pjūvio plotą. Prizmės pagrindo kraštinė $a = 6$ cm.



50 pav.



51 pav.

$\triangle$ Pavaizduokime duotosios prizmės pjūvį (51 pav.). Kadangi prizmė taisyklingoji, jos šoninės briaunos yra statmenos pagrindo plokštumai. Vadinasi, $\triangle ABC$ yra $\triangle ADB$ projekcija, t. y.

$$S_{\triangle ADB} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos \varphi} = \frac{a \cdot a \sqrt{3}}{4 \cdot \cos \varphi},$$

arba

$$S_{\triangle ADB} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}. \blacktriangle$$

I SKYRIAUS UŽDAVINIAI

1. Vektoriai $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ sudaro dešinįjį trejetą ir yra poromis statmeni; $|\mathbf{r}_1| = 7$, $|\mathbf{r}_2| = 5$, $|\mathbf{r}_3| = 6$. Apskaičiuokite $(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3)$.

2. Raskite vektorių $\mathbf{a} = (0; 3; -1)$, $\mathbf{b} = (5; 0; 0)$, $\mathbf{c} = (7; -2; 4)$ mišriąją sandaugą $(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c})$.

3. Išaiškinkite, ar komplanarūs vektoriai $\mathbf{a} = (8; 5; -13)$, $\mathbf{b} = (-4; 2; 8)$, $\mathbf{c} = (4; 7; -4)$. Jeigu vektoriai nekomplanarūs, tai išaiškinkite, kokią sistemą jie sudaro: kairinę ar dešininę.

4. Išaiškinkite, ar komplanarūs vektoriai $\mathbf{a}=(-2;\ -1;\ -3)$, $\mathbf{b}=(-1;\ 4;\ 6)$, $\mathbf{c}=(1;\ 5;\ 9)$.

5. Įrodykite, kad vektoriai $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, tenkinantys sąlygą $[\mathbf{r}_1;\ \mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_2;\ \mathbf{r}_3]+[\mathbf{r}_3;\ \mathbf{r}_1]=\mathbf{0}$, yra komplanarūs.

6. Ar vektorių **a**, **b** ir **c** mišriosios sandaugos reikšmė gali būti mažesnė už tų vektorių modulių sandaugą?

7. Vektorius **a** lygiagretus plokštumai σ. Vektoriai **b** ir **c** vaizduojami tos plokštumos tiesių atkarpomis. Raskite vektorių **a**, **b**, **c** mišriąją sandaugą.

8. Įrodykite, kad keturi taškai M_0 (3; 5; 1), M_1 (2; 4; 7), M_2 (1; 5; 3) ir M_3 (4; 4; 5) yra vienoje plokštumoje.

9. Ar keturi taškai M_0 (5; 2; −2), M_1 (6; −3; 1), M_2 (0; 4; 3), M_3 (2; 0; −4) yra vienoje plokštumoje?

10. Raskite vektorių $\mathbf{a}=(1;\ 2;\ 3)$, $\mathbf{b}=(-1;\ 3;\ 4)$, $\mathbf{c}=(2;\ 5;\ 2)$ nustatyto gretasienio tūrį.

11. Apskaičiuokite vektorių $\mathbf{r}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{r}_2=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$ ir $\mathbf{r}_3=\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$ nustatyto gretasienio tūrį.

12. Įrodykite, kad gretasienio, kurio trys briaunos yra iš vienos viršūnės išeinančios duotojo gretasienio sienų įstrižainės, tūris yra lygus dvigubam duotojo gretasienio tūriui.

13. Įrodykite tapatybę $(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2;\ \mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3;\ \mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1)=2(\mathbf{r}_1;\ \mathbf{r}_2;\ \mathbf{r}_3)$.

14. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tiesių AC_1, CA_1, BD_1, DB_1, CD_1 vektorines lygtis išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}=\mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{r}_2$, $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{r}_3$.

15. Tiesė eina per tašką N_0 (1; 2; 3), jos krypties vektorius $\mathbf{a}=(2;\ -2;\ 1)$. Sudarykite tos tiesės parametrines lygtis.

16. Sudarykite lygtis tiesės, einančios per taškus M_0 (3; −1; 0) ir M_1 (−2; −5; 4).

17. Duotos trikampio viršūnės A (1; −2; −4), B (1; 6; −8) ir C (−7; 11; 6). Sudarykite jo pusiaukraštinės, išvestos per viršūnę C, parametrines lygtis.

18. Keturi erdvės taškai M_0, M_1, M_2, M_3 tenkina sąlygą $2\cdot\overrightarrow{M_0M_1}+3\cdot\overrightarrow{M_0M_2}-4\cdot\overrightarrow{M_0M_3}=\mathbf{0}$. Ar galima teigti, kad taškas M_3 priklauso plokštumai, kurią nustato taškai M_0, M_1 ir M_2.

19. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per tris taškus M_0 (3; 1; −5), M_1 (8; 3; 3), M_2 (−2; −1; 4). Tą plokštumą pavaizduokite stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje.

20. Plokštuma σ eina per tris taškus M_0 (2; 0; 4), M_1 (3; 1; −2), M_2 (0; −3; −1). Kokia plokštumai σ priklausančio taško M_3 abscisė, kai jo ordinatė ir aplikatė atitinkamai lygios 0 ir 4?

21. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per tašką M_0 (2; 3; 5) ir statmenos vektoriui $\mathbf{n}=(4;\ 6;\ 0)$.

22. Plokštuma eina per tašką M_0 (3; −5; −2), jos normalės vektorius $\mathbf{n}=(4;\ -6;\ 1)$. Sudarykite plokštumos lygtį.

23. Plokštuma eina per koordinačių pradžią, jos normalės vektorius $\mathbf{n}=(0;\ -7;\ 4)$. Sudarykite plokštumos lygtį.

24. Plokštuma σ, kurios normalės vektorius $\mathbf{n}=(7;\ 5;\ -3)$, ašyje Oz atkerta atkarpą OQ; $|OQ|=6$. Sudarykite tos plokštumos lygtį.

25. Kokia plokštumos, kurios lygtis $7y=0$, padėtis Dekarto koordinačių sistemos atžvilgiu?

26. Sudarykite lygtį plokštumos, kuri eina per tašką M_0 (3; 4; −11) ir yra lygiagreti plokštumai Oxy.

27. Raskite atstumą nuo taško M (1; 2; 4) iki plokštumos $2x+2y-z-11=0$.

28. Apskaičiuokite atstumą d nuo taško Q (0; 1; −3) iki plokštumos, einančios per tris taškus M_0 (3; 1; −5), M_1 (8; 3; 3), M_2 (−2; −1; 4).

29. Įrodykite, kad plokštumos $2x+6y+10z-14=0$ ir $x+3y+5z+8=0$ yra lygiagrečios (neturi bendrų taškų).

30. Plokštuma σ_1 eina per tašką M_1 ir yra statmena vektoriui $\mathbf{n}_1=(3;\ 4;\ -5)$. Plokštuma σ_2 eina per tašką M_2 ir yra statmena vektoriui $\mathbf{n}_2=(12;\ 16;\ 7)$. Ar plokštumos σ_1 ir σ_2 yra lygiagrečios?

31. Sudarykite lygtį plokštumos, kuri eina per tašką M_0 (1; −5; 4) ir yra lygiagreti plokštumai $4x-7z+6=0$.

32. Ar susikerta plokštumos: a) $2x+3y+4z-12=0$ ir $3x-6y+5z+4=0$; b) $2x+$ $+3y+4z-12=0$ ir $6x+9y+12z-12=0$; c) $2x+3y+4z-12=0$ ir $6x+3y+10z-12=0$?

33. Sudarykite plokštumų $x-2y+3z-4=0$ ir $3x+2y-5z-4=0$ susikirtimo tiesės l kanonines lygtis.

34. Parašykite šių tiesių kanonines lygtis:

a) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 3x-1=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3=0, \\ y+5=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+2z=0, \\ 2x+3y-z=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+5y-6=0, \\ x-2y+3=0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y+2z=0, \\ 3y-z=0; \end{cases}$ *f*) $\begin{cases} 2y+z=0, \\ 3x-1=0. \end{cases}$

35. Sudarykite plokštumos $2x-3y-4z+11=0$ ir koordinačių plokštumų susikirtimo tiesių lygtis.

36. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per plokštumų $2x-3y+z-3=0$ ir $x+3y+2z+1=0$ susikirtimo tiesę ir per tašką M_0 (1; −2; 3).

37. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per plokštumų $2x-y+3z-5=0$ ir $x+$ $+2y-z+2=0$ susikirtimo tiesę ir lygiagrečios vektoriui $\mathbf{l}=(2;\ -1;\ -2)$.

38. Ar statmenos plokštumos $3x+4y-z+1=0$ ir $x-2y-5z+3=0$?

39. Nustatykite, kokia turi būti m reikšmė, kad lygtys

$$3x+4y+mz-26=0,\quad 4x-3y+4z+1=0$$

aprašytų statmenas plokštumas.

40. Raskite kampą tarp plokštumų

$$6x+3y-2z=0,\quad x+2y+6z-12=0.$$

41. Sudarykite lygtį plokštumos, kuri eina per tašką M_0 (3; −2; 1) ir yra statmena plokštumoms $3y-5z+1=0$, $x=0$.

42. Sudarykite lygtį plokštumos, kuri eina per taškus M_1 (3; −2; 1), M_2 (6; 0; 5) ir yra statmena plokštumai $x-y+2z-4=0$.

43. Sudarykite lygtį plokštumos, kuri eina per tašką M_0 (1; 2; 3) ir yra statmena plokštumoms $x-y+z-7=0$, $3x+2y-12z+5=0$.

44. Raskite taško M_1 (0; y; 3) ordinatę. Tas taškas priklauso plokštumai, kuri eina per tašką M_2 (2; −1; 3) ir yra lygiagreti plokštumai $x-y+2z-1=0$.

45. Patikrinkite, ar tiesės

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}\ \text{ ir }\ \frac{x+49}{48}=\frac{y+37}{37}=\frac{z}{4}$$

yra vienoje plokštumoje.

46. Ar lygiagrečios tiesės

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{-4},\quad \frac{x-7}{-6}=\frac{y-2}{9}=\frac{z}{12}?$$

47. Sudarykite tiesių parametrines lygtis:

a) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

48. Ar susikerta tiesės

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}\ \text{ ir }\ \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}?$$

49. Ar susikerta tiesės

$$\frac{x-4}{-6}=\frac{y+4}{4}=\frac{z}{-2}\ \text{ ir }\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}?$$

50. Tiesių l_1 ir l_2 krypties vektoriai $\mathbf{a}_1$ ir $\mathbf{a}_2$ tenkina sąlygą $\alpha\mathbf{a}_1+\beta\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$. Kokios yra α ir β reikšmės, kai tiesės l_1 ir l_2: a) susikerta; b) yra lygiagrečios?

51. Ar

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1} \text{ ir } \frac{x}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{1}$$

yra prasilenkiančios tiesės?

52. Ar tiesės

$$\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$$

yra prasilenkiančios?

53. Raskite kampą tarp tiesių:

a) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$;

b) $x=2t+1$, $y=3t-2$, $z=-6t+1$ ir

$$\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$$

54. Ar statmenos tiesės

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{-2} \text{ ir } \frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-3}{1}?$$

55. Duotos tiesės

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{a_1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

Kokia turi būti a_1 reikšmė, kad tiesės būtų statmenos?

56. Sudarykite kanonines lygtis tiesės, esančios yOz plokštumoje, einančios per koordinačių pradžią ir statmenos tiesei $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$.

57. Raskite lygtį tiesės, einančios per tašką M_0 (2; -3; 4) ir statmenos tiesėms

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+5}{1}, \quad \frac{x-8}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{1}.$$

58. Išaiškinkite tiesių tarpusavio padėtį. Duotos tų tiesių lygtys:

a) $x=t$, $y=-4t$, $z=-3t$;
$x=t$, $y=-8-4t$, $z=-3-3t$;

b) $x=-3+2t$, $y=-1+2t$, $z=4t$;
$x=3+t$, $y=-1+2t$, $z=4$;

c) $x=10+11t$, $y=-1-4t$, $z=-13t$;
$x=-2+3t$, $y=-1$, $z=4-t$.

59. Patikrinkite, ar tiesės

a) $\begin{cases} 2x-3z+2=0, \\ 2y-z-6=0 \end{cases}$ ir $\begin{cases} x-12z+49=0, \\ 4y-37z+148=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=3z-1, \\ y=-5z+7 \end{cases}$ ir $\begin{cases} y=2x-5, \\ z=7x+2 \end{cases}$

yra vienoje plokštumoje.

60. Išaiškinkite plokštumos $y+4z+17=0$ ir tiesės

$$\frac{x+25}{-3}=\frac{y-20}{4}=\frac{z}{-1}$$

tarpusavio padėtį.

61. Kokia turi būti c reikšmė, kad tiesė

$$\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$$

būtų lygiagreti plokštumai $2x-y+cz-2=0$?

62. Skirtingi taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje. Vektoriai **a** ir **b** — plokštumos σ krypties vektoriai; be to, $\vec{AB}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}$, o $\vec{AC}=-\mathbf{a}+2\mathbf{b}$. Įrodykite, kad tiesė BC yra lygiagreti plokštumai σ.

63. Tiesė l eina per taškus M_1 (5; 6; 7) ir M_2 (3λ; 2; 3); $\mathbf{n}=(a; b; c)$ — plokštumos σ normalės vektorius. Kokia yra λ reikšmė, kai $(M_1M_2)\|\sigma$?

64. $\mathbf{a}=(2; 3; 1)$ — tiesės l krypties vektorius, o $\mathbf{b}=(8; 12; 4)$ ir $\mathbf{c}=(6; 3; 7)$ — plokštumos σ krypties vektoriai. Įrodykite, kad $l\|\sigma$.

65. Įrodykite, kad tiesė $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-8}{4}$ ir plokštuma $3x-y+2z-9=0$ susikerta.

66. Raskite kampą tarp tiesės $x=7+5t$, $y=4+t$, $z=5+4t$ ir plokštumos $3x-y+$ $+2z-5=0$.

67. Įrodykite, kad tiesė $\frac{x-2}{4}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-5}{1}$ ir plokštuma $8x+6y+2z-11=0$ yra statmenos.

68. Kokios turi būti A ir D reikšmės, kad tiesė $x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-3+t$ būtų plokštumoje $Ax+2y-4z+D=0$?

69. Sudarykite lygtį plokštumos, einančios per tašką M_0 ir statmenos tiesei M_0M_1; čia M_0 (5; −2; 3), M_1 (8; −4; −1).

70. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Išvesti jo įstrižieji pjūviai AA_1C_1C ir BB_1D_1D. Įrodykite, kad tų pjūvių plokštumos yra statmenos.

71. Išaiškinkite tiesės $x=12+4t$, $y=9+3t$, $z=1+t$ ir plokštumos $3x+5y-z-2=0$ tarpusavio padėtį.

72. Išaiškinkite tiesės $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ ir plokštumos $x-3y+6z+7=0$ tarpusavio padėtį.

73. Kokia plokštumos ir tiesės tarpusavio padėtis:

a) $4x+2y+z+24=0$, $\quad\frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{2}$;

b) $4x+y-z=0$, $\quad\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+5}{2}$?

74. Ar visada teisingas teiginys: dviejų nelygiagrečių atkarpų, kurių galai yra lygiagrečiose plokštumose, ilgiai yra skirtingi?

75. Taisyklingosios keturkampės piramidės $MABCD$ pagrindo kraštinė lygi a, o piramidės apotema lygi b. Raskite piramidės aukštinę.

76. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi m, o plokščiasis kampas prie viršūnės lygus β. Raskite piramidės aukštinę.

77. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ modelyje parodykite šių figūrų projekcijas sienos AA_1B_1B plokštumoje: $[C_1D_1]$, $[AD]$, $[C_1D]$, $[DB_1]$, $\triangle C_1CD$, $\triangle ACD$, kvadrato BB_1C_1C.

78. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. a) Raskite taško $M\in[B_1C_1]$ projekcijas sienų $ABCD$, AA_1D_1D, AA_1B_1B plokštumose. b) Raskite taško $N=[DC_1]\cap[CD_1]$ projekcijas tose plokštumose.

79. Kokios yra dviejų tiesių l_1 ir l_2 projekcijos plokštumoje σ, kai: a) $l_1\cap l_2=M$; b) $l_1 \dot{-} l_2$; c) $l_1\|l_2$? Išnagrinėkite visus galimus atvejus.

80. Įrodykite, kad kampo ABC pusiaukampinės projekcija yra kampo $A'B'C'$ pusiaukampinė; kampas $A'B'C'$ — kampo ABC projekcija.

81. Nubrėžkite kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį. Kubas perkirstas plokštuma, einančia per taškus M, N ir K:

a) $M=A_1$, $|ND_1|=|ND|$, $|DK|=2|KC|$;

b) $|A_1M|=|MB_1|$, $|D_1N|=|NC_1|$, $|DK|=|KC|$.

82. Kubo $ABCDA'B'C'D'$ briaunos ilgis lygus a. Kubas perkirstas plokštuma, einančia per briaunų AD ir $B'C'$ vidurio taškus bei viršūnes A' ir C. Nubrėžkite kubo pjūvį. Raskite pjūvio plotą.

83. Nubrėžkite kubo pjūvį, kuris būtų taisyklingasis šešiakampis.

84. Nubrėžkite tetraedro $MABC$ pjūvį, einantį per briaunos AB vidurio tašką lygiagrečiai briaunoms: 1) AC ir AM; 2) BC ir CM; 3) BC ir AM.

85. Jeigu trys lygiagrečios plokštumos kerta dvi prasilenkiančias tieses, tai gautos atkarpos yra proporcingos. Įrodykite.

86. Atkarpos AB ir BC – kvadrato $ABCD$ kraštinės. Per tiesę AB išvesta plokštuma σ_1, o per tiesę BC – plokštuma σ_2. Tiesė l – plokštumų σ_1 ir σ_2 susikirtimo linija; be to, $l \perp (AB)$. Įrodykite, kad $(AB) \perp \sigma_2$.

87. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis lygus a, aukštinės ilgis lygus h. Piramidės pjūvis eina per dviejų gretimų šoninių briaunų vidurio taškus ir yra statmenas piramidės pagrindui. Raskite pjūvio plotą.

88. Taškai A ir B priklauso plokštumai σ. Kongruenčios atkarpos AA_1 ir BB_1 statmenos plokštumai σ ir yra skirtingose jos pusėse. $|AA_1| = |AB|$. Raskite keturkampio AA_1BB_1 kampų didumus.

89. Taškai M, A, B ir C nepriklauso vienai plokštumai. $(MA) \perp (BC)$, $(MB) \perp (AC)$. Įrodykite, kad $(MC) \perp (AB)$.

90. M – apskritimo taškas, $[MA]$ – statmuo apskritimo plokštumai, $[MB]$ – apskritimo skersmuo, $[BC]$ – styga. Nustatykite trikampio ABC rūšį.

91. Kabinetine projekcija pavaizduokite piramidę, kurios pagrindas yra: 1) kvadratas; 2) trikampis; 3) keturkampis.

92. Stačiojo trikampio įžambinė lygi m, o vieno kampo didumas lygus 60°. Trikampio plokštuma su projekcijų plokštuma sudaro 30° kampą. Raskite trikampio projekcijos plotą.

93. Trikampio kraštinės lygios 3,9 cm, 4,1 cm ir 2,8 cm. Trikampio plokštuma su projekcijų plokštuma sudaro 60° kampą. Raskite trikampio projekcijos plotą.

94. Tašką A veikia jėgos $F_1 = 3$N, $F_2 = 4$N ir $F_3 = 5$N. Kampo tarp jėgų F_1 ir F_2 didumas lygus 60°, o jėga F_3 statmena kiekvienai jų. Raskite atstojamąją jėgą.

95. Kabančio kelio per upę lynas viename krante pritvirtintas 40 m, o kitame krante 35,6 m aukštyje nuo upės lygio. Atstumas tarp tvirtinimo taškų projekcijų horizontaliojoje plokštumoje lygus 48,3 m. Raskite tarp tvirtinimo taškų esančio lyno ilgį. Nuosvyrai pridėkite 10%.

96. Duotos piramidės viršūnių koordinatės: $A\,(-1; 0; 2)$, $B\,(2; 1; 1)$, $C\,(3; 0; -1)$, $D\,(3; 2; 2)$. Raskite piramidės tūrį.

97. Vamzdžio vidinis skersmuo yra d_1, o išorinis – d_2. Jo pjūvio plokštuma su išilgine ašimi sudaro 45° kampą. Raskite pjūvyje gauto elipsinio žiedo plotą.

II SKYRIUS

Briaunainiai

§ 22. PUSPLOKŠTUMĖ. PUSERDVĖ. DVISIENIAI IR DAUGIASIENIAI KAMPAI

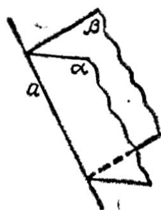
Priminsime, kad kiekviena plokštumos tiesė a dalija visų nepriklausančių tai tiesei plokštumos taškų aibę į dvi aibes: jeigu taškai M ir N priklauso skirtingoms aibėms, tai atkarpa MN kerta tiesę a, o jeigu taškai M ir N priklauso vienai aibei, tai atkarpa MN nekerta tiesės a. Tos aibės vadinamos *atviromis pusplokštumėmis*, o tiesė a – jų kraštu. Atviros pusplokštumės ir jos krašto a sąjunga vadinama *pusplokštume*, kurios kraštas a.

Kiekviena plokštuma γ dalija visų nepriklausančių tai plokštumai erdvės taškų aibę į dvi aibes šitaip: jeigu taškai M ir N priklauso skirtingoms aibėms, tai atkarpa MN kerta plokštumą γ, o jeigu taškai M ir N priklauso vienai aibei, tai atkarpa MN nekerta plokštumos γ. Tos aibės vadinamos *atviromis puserdvėmis*, o plokštuma γ – jų kraštu. Atviros puserdvės ir jos krašto γ sąjunga vadinama *puserdve*, kurios kraštas γ.

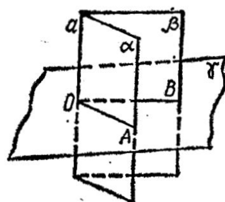
Dar priminsime, kad kampu (plokštumoje) vadinama figūra, kuri yra dviejų skirtingų spindulių, turinčių bendrą pradžią, ir jų ribojamos plokštumos dalies sąjunga.

Du spinduliai, turintys bendrą pradžią, riboja du kampus, kurių kraštinės yra bendros. Jeigu kampo kraštinės sudaro tiesę, tai toks kampas vadinamas *ištiestiniu*.

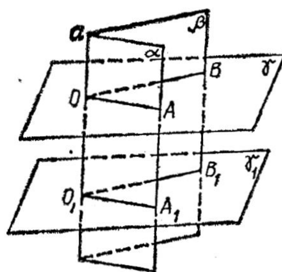
Erdvėje išnagrinėkime figūrą Γ, kurią sudaro dvi skirtingos pusplokštumės α ir β, turinčios bendrą kraštą a. Ta figūra dalija nepriklausančių jai erdvės taškų aibę į dvi dalis H_1 ir H_2, turinčias bendrą kraštą Γ. Kiekviena iš figūrų $\Phi_1 = H_1 \cup \Gamma$ ir $\Phi_2 = H_2 \cup \Gamma$ vadinama *dvisieniu kampu*, kurio briauna a, o sienos α ir β (52 pav.).



52 pav.



53 pav.



54 pav.

Dvisienis kampas vadinamas *ištiestiniu*, jeigu jo sienos sudaro plokštumą. Visi dvisienio kampo taškai, nepriklausantys sienoms, sudaro jo vidinę sritį.

Dvisienį kampą žymėsime ženklu $\angle$ ir raidėmis, nurodančiomis jo sienas ir briauną. Dvisienio kampo briauną žyminti raidė rašoma tarp jo sienas žyminčių raidžių. Pavyzdžiui, $\angle \alpha a \beta$. Kartais dvisienis kampas žymimas trumpai, nurodant tik briauną. Pavyzdžiui, $\angle a$.

Sakykime, duotas dvisienis kampas $\alpha a \beta$. Per bet kurį to dvisienio kampo briaunos tašką O išveskime plokštumą γ, statmeną briaunai a (53 pav.). Gausime kampą AOB:

$$\angle AOB = \gamma \cap \angle \alpha a \beta.$$

Pastebėsime, kad to kampo didumas nepriklauso nuo taško O padėties briaunoje a. Iš tikrųjų, briaunoje a pasirinkime kitą tašką O_1 ir išveskime kitą plokštumą γ_1, statmeną briaunai a. Remiantis teorema apie kampus su vienakryptėmis kraštinėmis, gautojo kampo $A_1O_1B_1$ didumas yra lygus kampo AOB didumui (54 pav.).

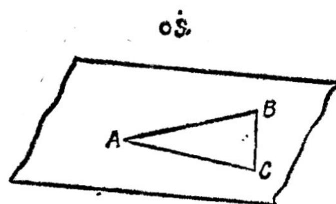
Kampas, kuris yra dvisienio kampo ir jo briaunai statmenos plokštumos sankirta, vadinamas dvisienio kampo *tiesiniu kampu.* Iš apibrėžimo išplaukia, kad tiesinio kampo kraštinės yra statmenos dvisienio kampo briaunai.

Dvisienio kampo *didumu* vadinamas jo tiesinio kampo didumas.

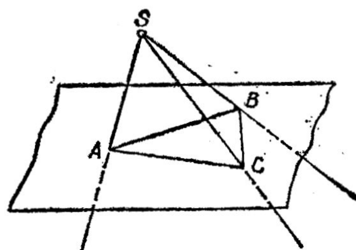
Dvisienio kampo $\alpha a \beta$ didumas žymimas $\widehat{\alpha a \beta}$. Pavyzdžiui, $\widehat{\alpha a \beta}=30°$, $\widehat{\alpha a \beta}=45°$ ir t. t.

Dvisienis kampas vadinamas *smailiuoju, stačiuoju* arba *bukuoju* priklausomai nuo to, ar to dvisienio kampo tiesinis kampas yra smailus, status ar bukas.

Pastebėsime, kad bet kurios dvi susikertančios plokštumos dalija visų nepriklausančių toms plokštumoms erdvės taškų aibę į keturias nesikertančias aibes. Kiekviena tų dalių yra atitinkamo dvisienio kampo viduje. Mažiausias iš tų keturių dvisienių kampų didumų vadinamas *kampu tarp duotųjų susikertančių plokštumų.* Laikoma, kad kampas tarp dviejų lygiagrečių plokštumų lygus 0°.



55 pav.



56 pav.

Kampas tarp dviejų plokštumų α ir β žymimas šitaip: $(\widehat{\alpha; \beta})$. Iš apibrėžimo išplaukia, kad

$$0° \leqslant (\widehat{\alpha; \beta}) \leqslant 90°.$$

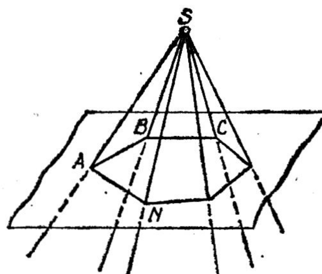
Priminsime štai ką: jeigu kampas tarp plokštumų α ir β lygus 90°, tai plokštumos α ir β vadinamos *statmenomis viena kitai.* Tokiu atveju rašoma $\alpha \perp \beta$.

Sakykime, duotas $\triangle ABC$ ir taškas S, nepriklausantis trikampio plokštumai (55 pav.). Visų spindulių, turinčių bendrą pradžią S ir kertančių duotąjį trikampį (56 pav.), sąjunga vadinama *trisieniu kampu.* Taškas S vadinamas trisienio kampo *viršūne,* spinduliai SA, SB, SC – jo *briaunomis.* Kampai ASB, BSC, CSA vadinami trisienio kampo *sienomis* arba jo *plokščiaisiais kampais.* Kiekvieno jų didumas yra intervale]0°; 180°[.

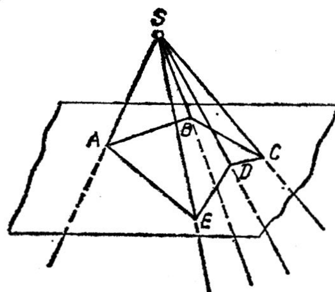
Jeigu duotas daugiakampis $ABC\ldots N$ ir taškas S, nepriklausantis daugiakampio plokštumai, tai visų spindulių, turinčių bendrą pradžią S ir kertančių duotąjį daugiakampį (57 pav.), sąjunga vadinama *daugiasieniu kampu.* Taškas S vadinamas daugiasienio kampo *viršūne,* spinduliai SA, $SB, \ldots, SN$ – jo *briaunomis.* Kampai ASB, BSC, ... vadinami daugiasie-

nio kampo *sienomis* arba jo *plokščiaisiais kampais*. Daugiasienio kampo kiekvieno plokščiojo kampo didumas yra intervale]0°; 180°[.

Priklausomai nuo sienų skaičiaus daugiasieniai kampai vadinami *trisieniais*, *ketursieniais* ir t. t. Daugiasienis kampas žymimas arba viena raide, nurodant viršūnę, arba keliomis raidėmis, nurodant viršūnę ir po vieną kiekvienos briaunos tašką, pavyzdžiui, $SABCD$. Pirmiausia rašoma raidė, žyminti viršūnę. Bet kurios dvi daugiasienio kampo sienos, turinčios bendrą briauną, nustato dvisienį kampą. Dvisieniai kampai žymimi dviem raidėmis: pirmoji žymi viršūnę, antroji – briaunos tašką. Pavyzdžiui, $\angle SA$, $\angle SB$, $\angle SC$.



57 pav.



58 pav.

Daugiasienis kampas vadinamas *iškiluoju*, jeigu jis yra vienoje kiekvienos jo sienos plokštumos pusėje. Priešingu atveju daugiasienis kampas vadinamas *neiškiluoju*. 58 paveiksle pavaizduotas neiškilasis penkiasienis kampas.

Iškilasis daugiasienis kampas vadinamas *taisyklinguoju*, jeigu visos jo sienos yra kongruenčios ir visi jo dvisieniai kampai kongruentūs.

§ 23. TRISIENIŲ IR DAUGIASIENIŲ KAMPŲ PLOKŠČIŲJŲ KAMPŲ SAVYBĖS

1 teorema. *Trisienio kampo kiekvieno plokščiojo kampo didumas yra mažesnis už kitų dviejų jo plokščiųjų kampų didumų sumą.*

□ Sakykime, duotas trisienis kampas $SABC$. Jo plokščiųjų kampų didumus pažymėkime α, β, γ (59 pav.). Sakykime, γ – didžiausias iš tų kampų. Pakanka įrodyti, kad $\gamma<\alpha+\beta$, nes jeigu $\alpha\geqslant\gamma$ (arba $\beta\geqslant\gamma$), tai įrodymas akivaizdus. Sienos ASB plokštumoje išveskime tokį spindulį SM, kad būtų $\widehat{ASM}=\widehat{ASC}=\beta$. Sakykime, N – atkarpos AB ir spindulio SM susikirtimo taškas. Spindulyje SC atidėkime atkarpą SD, kongruenčią atkarpai SN ($|SD|=|SN|$). $\triangle ASD\cong\triangle ASN$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Iš $\triangle ABD$ turime

$$|AD|+|DB|>|AB|. \quad (1)$$

Brėžėme taip, kad būtų

$$|AB|=|AN|+|NB| \text{ ir } |AD|=|AN|. \qquad (2)$$

Iš (1) nelygybės ir (2) lygybių išplaukia, kad

$$|DB|>|NB|.$$

Remdamiesi kosinusų teorema, iš trikampių BSD ir BSN išreikškime $|DB|$ ir $|BN|$:

$$|BD|^2=|BS|^2+|DS|^2-2|BS|\cdot|DS|\cos\alpha,$$

$$|BN|^2=|BS|^2+|NS|^2-2|BS|\cdot|NS|\cos\widehat{NSB}.$$

Kadangi $|DS|=|NS|$, o $|DB|>|NB|$, tai

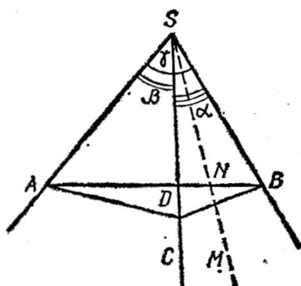
$$\cos\alpha<\cos\widehat{NSB}.$$

Iš čia $\widehat{NSB}<\alpha$. Tada

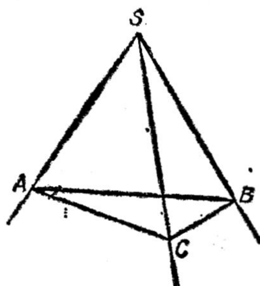
$$\widehat{ASN}+\widehat{NSB}<\alpha+\beta, \text{ arba } \gamma<\alpha+\beta. \blacksquare$$

Iš įrodytos teoremos betarpiškai išplaukia, kad trisienio kampo kiekvieno plokščiojo kampo didumas yra didesnis už kitų dviejų jo plokščiųjų kampų didumų skirtumą. Pavyzdžiui: $\alpha>\gamma-\beta$, $\beta>\gamma-\alpha$.

2 teorema. *Visų trijų trisienio kampo plokščiųjų kampų didumų suma yra mažesnė už* 360°.



59 pav.



60 pav.

□ Sakykime, duotas trisienis kampas $SABC$ (60 pav.). Per taškus A, B, C išveskime plokštumą. Gausime dar tris trisienius kampus: $ASBC$, $BSAC$ ir $CSAB$. Kiekvienam jų taikykime teoremą apie trisienio kampo dviejų plokščiųjų kampų didumų sumą:

$$\widehat{SAB}+\widehat{SAC}>\widehat{BAC},$$

$$\widehat{SBC}+\widehat{SBA}>\widehat{ABC}, \qquad (3)$$

$$\widehat{SCA}+\widehat{SCB}>\widehat{ACB}.$$

Sudėję (3) nelygybes, gauname

$$\widehat{SAB}+\widehat{SAC}+\widehat{SBC}+\widehat{SBA}+\widehat{SCA}+\widehat{SCB}>\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}.$$

Kadangi trikampio kampų didumų suma lygi 180°, tai

$$(\widehat{SAC}+\widehat{SCA})+(\widehat{SCB}+\widehat{SBC})+(\widehat{SAB}+\widehat{SBA})>180°. \qquad (4)$$

Pažymėkime $\widehat{ASC}=\alpha$, $\widehat{BSC}=\beta$, $\widehat{ASB}=\gamma$. Tada iš trikampių ASC, ASB, BSC turime:

$$\widehat{SCA}+\widehat{SAC}=180°-\alpha,$$

$$\widehat{SCB}+\widehat{SBC}=180°-\beta,$$

$$\widehat{SAB}+\widehat{SBA}=180°-\gamma.$$

Dabar (4) nelygybė yra šitokia:

$$180°-\alpha+180°-\beta+180°-\gamma>180°.$$

Iš čia ir išplaukia, kad

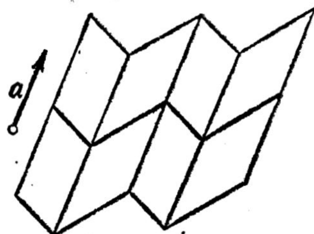
$$\alpha+\beta+\gamma<360°. \blacksquare$$

Iškiląjį daugiasienį kampą padalijus į trisienius kampus, galima įrodyti šitokį teiginį.

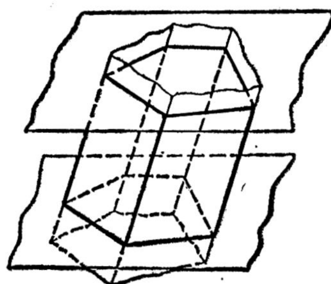
Visų iškilojo daugiasienio kampo plokščiųjų kampų didumų suma yra mažesnė už 360°.

§ 24. PRIZMĖ

Jeigu per kiekvieną plokščiosios laužtės tašką išvesime tiesę, lygiagrečią duotajai krypčiai, kuri nėra lygiagreti laužtės plokštumai, tai gausime *begalinį prizminį paviršių* (61 pav.)



61 pav.

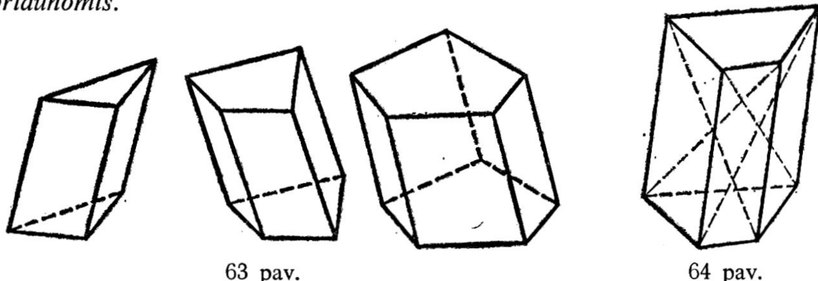


62 pav.

Jeigu per kiekvieną daugiakampio tašką išvesime tiesę, lygiagrečią duotajai krypčiai, kuri nėra lygiagreti daugiakampio plokštumai, tai gausime *begalinę prizmę*. Bet kurios dvi lygiagrečios plokštumos, nelygiagrečios

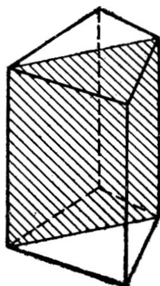
duotajai krypčiai, iškerta iš jos briaunainį, kuris vadinamas *prizme* (62 pav.). Kiekvienos tų lygiagrečių plokštumų ir prizmės sankirta vadinama *prizmės pagrindu.*

Prizmės šoninės sienos yra lygiagretainiai. Jų sąjunga sudaro prizmės *šoninį paviršių.* Lygiagretainių bendros kraštinės vadinamos prizmės *šoninėmis briaunomis*, o pagrindo kraštinės kartais vadinamos *pagrindo briaunomis.*

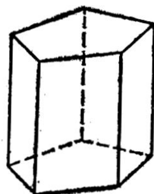


63 pav. 64 pav.

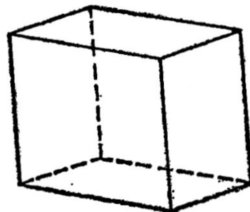
Priklausomai nuo pagrindo viršūnių skaičiaus prizmės vadinamos *trikampėmis, keturkampėmis, penkiakampėmis, n-kampėmis* (63 pav.). Atkarpa, jungianti dvi vienoje sienoje nesančias prizmės viršūnes, vadinama prizmės *įstrižaine.* Aišku, trikampė prizmė neturi įstrižainių. Nesunku įsitikinti, kad n-kampės prizmės įstrižainių skaičius lygus $n(n-3)$. Pavyzdžiui, keturkampė prizmė turi $4 \cdot (4-3)=4$ (64 pav.), o penkiakampė prizmė $5 \cdot (5-3)=10$ įstrižainių. Plokštuma, einanti per dvi vienoje sienoje nesančias prizmės šonines briaunas, vadinama *įstrižąja plokštuma* (65 pav.). Statmens prizmės pagrindų plokštumoms atkarpa, kurios galai yra tose plokštumose, vadinama *prizmės aukštine.* Prizmė, kurios šoninės briaunos yra statmenos pagrindų plokštumoms, vadinama *stačiąja prizme* (66 pav.). Jeigu prizmės šoninės briaunos nėra statmenos jos pagrindų plokštumoms, tai prizmė vadinama *pasvirąja prizme.* Stačioji prizmė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, vadinama *taisyklingąja prizme.*



65 pav.



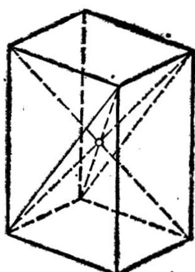
66 pav.



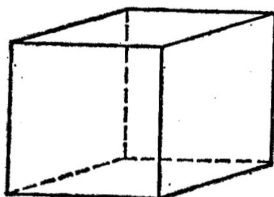
67 pav.

Prizmė, kurios pagrindas yra lygiagretainis, vadinama *gretasieniu.* Iš apibrėžimo išplaukia, kad visos gretasienio sienos – lygiagretainiai (67 pav.). Teisinga šitokia teorema: *gretasienio įstrižainės vidurio taškas yra jo*

simetrijos centras. Iš tos teoremos išplaukia, kad priešingos gretasienio sienos yra kongruenčios ir lygiagrečios, o visos gretasienio įstrižainės susikerta viename taške, kuris įstrižaines dalija pusiau (68 pav.).



68 pav.

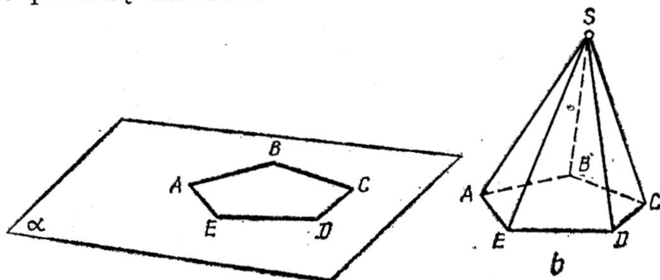


69 pav.

Gretasienis, kurio šoninės briaunos yra statmenos jo pagrindo plokštumai, vadinamas *stačiuoju gretasieniu.* Stačiojo gretasienio šoninės sienos — stačiakampiai (69 pav.). Statusis gretasienis, kurio pagrindai — stačiakampiai, vadinamas *stačiakampiu gretasieniu.* Visos stačiakampio gretasienio sienos — stačiakampiai. Stačiakampis gretasienis, kurio trys briaunos, išeinančios iš vienos viršūnės, yra kongruenčios, vadinamas *kubu.* Taigi visos kubo sienos — kongruentūs kvadratai.

§ 25. PIRAMIDĖ IR NUPJAUTINĖ PIRAMIDĖ

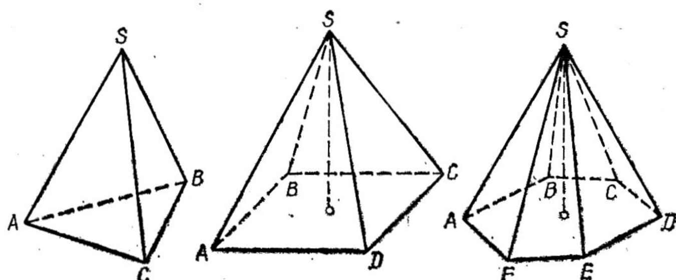
Piramidės vaizdinį susidarėte VIII klasės geometrijos kurse. Priminsime, kaip galima konstruoti piramidę. Plokštumoje α imkime kokį nors daugiakampį, pavyzdžiui, penkiakampį *ABCDE.* Tą daugiakampį laikykime piramidės *pagrindu.* Šalia plokštumos α imkime tašką *S* (70 pav., *a*). Tašką *S* atkarpomis sujunkime su visais daugiakampio taškais (70 pav., *b*). Gausime piramidę *SABCDE.*



70 pav.

Trikampiai *SAB, SBC, SCD, SDE, SEA* vadinami piramidės *šoninėmis sienomis*, taškas *S* — jos *viršūne*, šoninių sienų bendros kraštinės *SA, SB, SC, SD, SE* — *šoninėmis briaunomis.*

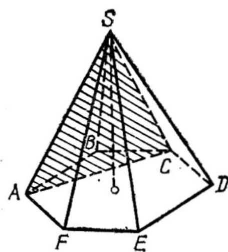
Priklausomai nuo pagrindo kraštinių skaičiaus piramidės vadinamos *trikampėmis*, *keturkampėmis*, *n-kampėmis*. 71 paveiksle pavaizduota trikampė, keturkampė ir šešiakampė piramidė.



71 pav.

Plokštuma, einanti per piramidės viršūnę ir pagrindo įstrižainę, vadinama *įstrižąja plokštuma*, o gautasis pjūvis — *įstrižuoju pjūviu*. 72 paveiksle vienas įstrižųjų šešiakampės piramidės pjūvių užbrūkšniuotas.

Statmens piramidės pagrindo plokštumai, išvesto per piramidės viršūnę, atkarpa, kurios galai yra piramidės viršūnė ir statmens pagrindas, vadinama piramidės *aukštine*.



72 pav.

Piramidė vadinama *taisyklingąja*, jeigu piramidės pagrindas — taisyklingasis daugiakampis ir piramidės viršūnės projekcija yra jos pagrindo centras.

Taisyklingosios piramidės visos šoninės sienos — kongruentūs lygiašoniai trikampiai, visos šoninės briaunos — kongruenčios.

Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė, išvesta per piramidės viršūnę, vadinama piramidės *apotema*. Taisyklingosios piramidės visos apotemos yra kongruenčios.

Jeigu pagrindo kraštinę pažymėsime a_n, o apotemą $h_{\check{s}on}$, tai piramidės vienos šoninės sienos plotas bus lygus $\frac{1}{2}\, a_n \cdot h_{\check{s}on}$.

Piramidės šoninio paviršiaus plotą pažymėkime $S_{\check{s}on}$. Kadangi taisyklingosios piramidės šoninį paviršių sudaro n kongruenčių sienų, tai

$$S_{\check{s}on} = \frac{1}{2}\, a_n \cdot h_{\check{s}on} \cdot n = \frac{P \cdot h_{\check{s}on}}{2};$$

čia P — piramidės pagrindo perimetras.

Piramidės viso paviršiaus plotą galima apskaičiuoti šitaip:

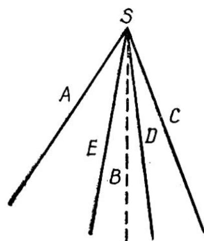
$$S_{pir} = S_{pagr} + S_{\check{s}on}.$$

Piramidės tūris lygus trečdaliui jos pagrindo ploto (S_{pagr}) ir aukštinės (h) sandaugos:

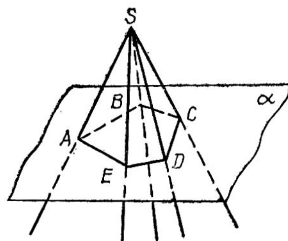
$$V_{pir} = \frac{1}{3}\, S_{pagr}\, h.$$

Šią ir kai kurias kitas formules išvesime tolesniuose skyriuose.

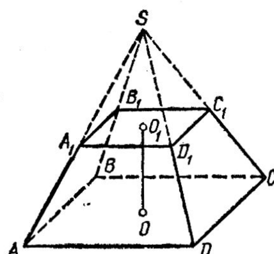
Dabar piramidę konstruosime kitaip. Sakykime, duotas daugiasienis, pavyzdžiui, penkiasienis kampas S (73 pav.). Išveskime plokštumą α, kuri kirstų visas duotojo daugiasienio kampo briaunas skirtinguose taškuose A, B, C, D, E (74 pav.). Tada piramidė $SABCDE$ yra daugiasienio kampo ir puserdvės, kurios kraštas α, sankirta.



73 pav.



74 pav.



75 pav.

Lengva matyti, kad piramidės visų sienų skaičius gali būti bet koks, tik ne mažesnis kaip keturi. Kertant plokštuma trisienį kampą, gaunama trikampė piramidė, kuri turi keturias sienas. Kiekviena trikampė piramidė kartais vadinama *tetraedru*, kitaip sakant, ketursieniu.

Piramidę perkirtę plokštuma, lygiagrečia pagrindo plokštumai, gausime *nupjautinę piramidę*. 75 paveiksle pavaizduota keturkampė nupjautinė piramidė.

Priklausomai nuo pagrindo kraštinių skaičiaus nupjautinės piramidės irgi vadinamos *trikampėmis*, *keturkampėmis*, *n-kampėmis*. Iš nupjautinės piramidės apibrėžimo išplaukia, kad ji turi du pagrindus: viršutinį ir apatinį. Nupjautinės piramidės pagrindai – du panašieji daugiakampiai, kurių kraštinės poromis lygiagrečios. Nupjautinės piramidės šoninės sienos – trapecijos.

Nupjautinės piramidės *aukštine* vadinama statmens pagrindų plokštumoms atkarpa, kurios vienas galas priklauso viršutiniam pagrindui.

Taisyklingąja nupjautine piramide vadinama taisyklingosios piramidės dalis, esanti tarp jos pagrindo ir jam lygiagrečios pjūvio plokštumos. Taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninės sienos (trapecijos) aukštinė vadinama *apotema*.

Galima įrodyti, kad taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninės briaunos yra kongruenčios, visos šoninės sienos – kongruenčios, apotemos – kongruenčios.

1 teorema. *Taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pusei pagrindų perimetrų sumos ir aukštinės sandaugos.*

Duota: taisyklingoji nupjautinė n-kampė piramidė, a – apotemos ilgis, P ir P_1 – pagrindų perimetrai.

Reikia įrodyti:

$$S_{\text{šon}} = \frac{1}{2}(P + P_1)\, a.$$

□ Taisyklingosios nupjautinės piramidės visos šoninės sienos – kongruenčios trapecijos. Kiekvienos trapecijos (šoninės sienos) plotas

$$S=\frac{1}{2}(a_n+a_n')\,a;$$

čia a_n – apatinio pagrindo kraštinės ilgis, a_n' – viršutinio pagrindo kraštinės ilgis, a – apotemos ilgis. Vadinasi,

$$S_{\text{šon}}=n\cdot\frac{1}{2}(a_n+a_n')\,a=\frac{1}{2}(na_n+na_n')\,a.$$

Kadangi $na_n=P$, $na_n'=P_1$, tai

$$S_{\text{šon}}=\frac{1}{2}(P+P_1)\,a. \blacksquare$$

2 teorema. *Jeigu piramidę perkirsime pagrindui lygiagrečia plokštuma, tai:*

1) *šoninės briaunos ir aukštinė bus padalytos į proporcingas dalis;*

2) *pjūvis bus į pagrindą panašus daugiakampis;*

3) *pjūvio ir pagrindo plotų santykis bus lygus jų atstumų nuo viršūnės kvadratų santykiui.*

Teoremą pakanka įrodyti, kai nupjautinė piramidė yra trikampė.

Kadangi lygiagrečių plokštumų susikirtimo su trečiąja plokštuma tiesės yra lygiagrečios, tai $(AB)\|(A_1B_1)$, $(BC)\|(B_1C_1)$, $(AC)\|(A_1C_1)$ (76 pav.).

Lygiagrečios tiesės kampo kraštinėse atkerta proporcingas atkarpas. Vadinasi,

$$\frac{|SA|}{|SA_1|}=\frac{|SB|}{|SB_1|}=\frac{|SC|}{|SC_1|}.$$

$\triangle SAB\sim\triangle SA_1B_1$, todėl

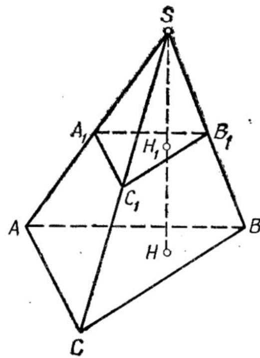
$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|}=\frac{|SB|}{|SB_1|};$$

$\triangle SBC\sim\triangle SB_1C_1$, todėl

$$\frac{|BC|}{|B_1C_1|}=\frac{|SB|}{|SB_1|}=\frac{|SC|}{|SC_1|}.$$

Iš čia

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|}=\frac{|BC|}{|B_1C_1|}=\frac{|AC|}{|A_1C_1|}.$$



76 pav.

Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ atitinkami kampai yra kongruentūs, nes jų atitinkamos kraštinės yra vienakryptės. Todėl

$$\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1.$$

Panašiųjų trikampių plotų santykis yra lygus atitinkamų kraštinių kvadratų santykiui:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{|AB|^2}{|A_1B_1|^2}.$$

Kadangi

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|SH|}{|SH_1|},$$

tai

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{|SH|^2}{|SH_1|^2}. \blacksquare$$

§ 26. BRIAUNAINIAI

Dauguma mineralų yra briaunainio formos kristalai.

Nuo seniausių laikų žmogaus techninėje kūryboje vyrauja paprasčiausios briaunainių pavidalo erdvinės formos. Tokios yra Egipto piramidės, daugelis bokštų ir pastatų.

Rusų nacionalinėje architektūroje yra labai daug nepaprasto daugiasienių formų derinimo pavyzdžių.

Konstruojant šiuolaikinius pastatus ir įvairius inžinerinius įrenginius, techninėje optikoje ir mašinų detalėse nuolat taikomos šios paprastos ir gražios formos.

Pateiksime bendrą iškilojo briaunainio apibrėžimą.

Erdvės taškų aibė vadinama *aprėžtąja*, jeigu yra toks skaičius M, kad $|AB| \leqslant M$, kad ir kokie būtų tos aibės taškai A ir B.

Aprėžtųjų aibių pavyzdžiai yra rutulys, ritinys, kūgis, piramidė, prizmė. Aišku, kiekviena erdvės taškų aibė, kuri yra baigtinio skaičiaus išvardytų aibių sąjunga arba sankirta, irgi yra aprėžta aibė.

Erdvės taškas M vadinamas aibės *kraštiniu tašku*, jeigu kiekviename rutulyje, kurio centras M, yra ir tai aibei priklausantys taškai, ir jai nepriklausantys taškai. Visų aibės kraštinių taškų aibė vadinama jos *kraštu*.

Aibė vadinama *uždarąja*, jeigu jai priklauso visi kraštiniai taškai. Aibė vadinama *atvirąja*, jeigu jai nepriklauso nė vienas kraštinis taškas.

Puserdvė, dvisienis kampas, rutulys yra uždarosios aibės. Šių aibių kraštai yra plokštuma, dviejų pusplokštumių sąjunga, sfera.

Erdvės taškų aibė vadinama *iškiląja*, jeigu toje aibėje yra bet kuriuos du jos taškus jungianti atkarpa.

Rutulys, ritinys, trikampė piramidė, puserdvė, dvisienis kampas yra iškilosios aibės. Iš jų rutulys, ritinys ir trikampė piramidė yra aprėžtosios aibės. Puserdvė ir dvisienis kampas yra neaprėžtosios aibės.

Atvira aprėžta iškiloji erdvės taškų aibė vadinama *atviru iškiluoju briaunainiu*, jeigu jos kraštas yra baigtinio skaičiaus daugiakampių sąjunga.

Atviro iškilojo briaunainio ir jo krašto sąjunga vadinama *uždaru iškiluoju briaunainiu* arba tiesiog *iškiluoju briaunainiu.*

§ 27. TAISYKLINGIEJI BRIAUNAINIAI

Iškilasis briaunainis vadinamas *taisyklinguoju*, jeigu visos jo sienos — kongruentūs taisyklingieji daugiakampiai ir visi jo daugiasieniai kampai — kongruentūs taisyklingieji daugiasieniai kampai.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad taisyklingojo briaunainio visi dvisieniai

kampai yra kongruentūs, visi plokštieji kampai – kongruentūs ir visos jo briaunos – kongruenčios. Galima įrodyti šitokią teoremą.

Į kiekvieną taisyklingąjį briaunainį galima įbrėžti sferą, apie kiekvieną taisyklingąjį briaunainį galima apibrėžti sferą.

Iš tos teoremos išplaukia, kad įbrėžtos į taisyklingąjį briaunainį sferos centras sutampa su apibrėžtos apie jį sferos centru.

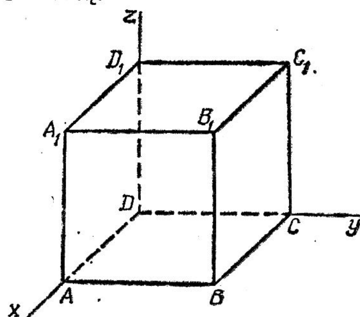
Taisyklingojo briaunainio įbrėžtinės ir apibrėžtinės sferos bendras centras vadinamas to briaunainio *centru.*

Taisyklingo iškilojo briaunainio *kraštas* yra uždarasis paviršius, kuris yra visų briaunainio sienų sąjunga.

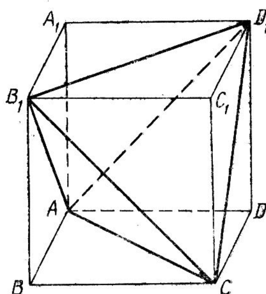
Taisyklinguosius briaunainius žinojo jau Senovės Graikijoje (V a.). Pirmasis apie juos užsiminė Platonas. Nuo to laiko jie ir vadinami penkiais Platono kūnais. Garsusis Euklido veikalas „Pradmenys" prasideda taisyklingojo trikampio brėžimo aprašymu ir baigiasi penkių taisyklingųjų daugiasienių kūnų aprašymu.

Taisyklingieji briaunainiai iki šiol vadinami dar ir graikiškais vardais.

1. Kubas. Sakykime, stačiakampėje koordinačių sistemoje $Oxyz$ duotos šešios plokštumos, kurių lygtys yra $x=0$ ir $x=a$, $y=0$ ir $y=a$, $z=0$ ir $z=a$. Išnagrinėkime šešių puserdvių $x \geqslant 0$, $x \leqslant a$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant a$, $z \geqslant 0$, $z \leqslant a$ sankirtą.



77 pav.



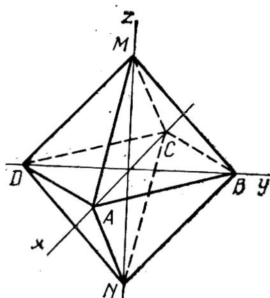
78 pav.

Lengva pastebėti, kad tų šešių puserdvių sankirta yra šešiasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (77 pav.). Gautasis šešiasienis yra stačiakampis gretasienis, kurio visi trys matmenys lygūs. Stačiakampis gretasienis, kurio matmenys yra lygūs, vadinamas *kubu.* Šio briaunainio kraštą sudaro šeši kongruentūs kvadratai; daugiasieniai kampai prie jo viršūnių yra kongruentūs trisieniai kampai, visi plokštieji kampai – kongruentūs ir visi dvisieniai kampai – kongruentūs. Vadinasi, gautasis briaunainis yra taisyklingas. Jis vadinamas *taisyklinguoju heksaedru,* arba *kubu* (graikiškas žodis „heksaedras" reiškia šešiasienį). Pastebėsime, kad kiekvienas gretasienis yra heksaedras.

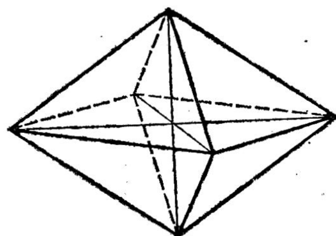
2. Taisyklingasis tetraedras. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnės A, B_1, C, D_1 nėra vienoje plokštumoje, todėl yra tam tikro tetraedro viršūnės. Lengva įsitikinti, kad tetraedro AB_1CD_1 kraštą sudaro keturi kongruentūs taisyklingieji trikampiai (78 pav.):

$$\triangle AB_1C \cong \triangle ACD_1 \cong \triangle AD_1B_1 \cong \triangle B_1CD_1$$

(nes visos jų kraštinės yra kongruenčių kvadratų įstrižainės). Daugiasieniai kampai prie tetraedro viršūnių yra kongruentūs trisieniai kampai; visi plokštieji kampai ir visi dvisieniai kampai – kongruentūs. Vadinasi, minėtasis tetraedras yra taisyklingas. Jis vadinamas *taisyklinguoju tetraedru* (graikiškas žodis „tetraedras" reiškia ketursienį). Pastebėsime, kad kiekviena trikampė piramidė yra tetraedras.

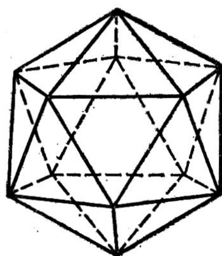


79 pav.

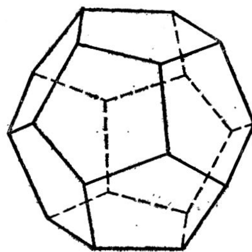


80 pav.

3. Taisyklingasis oktaedras. Stačiakampėje koordinačių sistemoje imkime šešis taškus: A $(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, C $(-a;0;0)$, D $(0;-a;0)$, M $(0;0;a)$ ir N $(0;0;-a)$. Kiekvienas taškų trejetas (M, A, B), (M, B, C), (M, C, D), (M, D, A), (N, A, B), (N, B, C), (N, C, D) ir (N, D, A) nustato plokštumą (79 pav.).



81 pav.

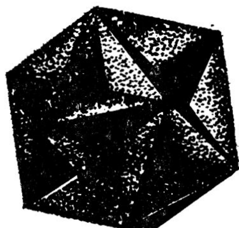


82 pav.

Aštuonių puserdvių, kurių kraštai yra plokštumos (MAB), (MBC), ..., (NDA), sankirta yra aštuonsienis $MABCDN$. Jo kraštą sudaro aštuoni kongruentūs taisyklingieji trikampiai (jų kraštinės kongruenčios, nes yra kongruenčių stačiųjų trikampių įžambinės). Visi jo daugiasieniai kampai yra kongruentūs taisyklingieji ketursieniai kampai; visi jo plokštieji kampai – kongruentūs ir visi dvisieniai kampai – kongruentūs. Vadinasi, aštuonsienis yra taisyklingasis. Jis vadinamas *taisyklinguoju oktaedru* (graikiškas žodis „oktaedras" reiškia aštuonsienį). Oktaedrai būna ir netaisyklingieji. Pavyzdžiui, taisyklingoji keturkampė dviguboji piramidė (bipiramidė) (80 pav.) (taisyklingosios keturkampės dvigubosios piramidės visos sienos – lygiašoniai trikampiai).

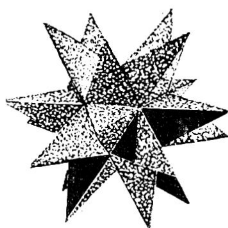
4. Taisyklingasis ikosaedras. Šio briaunainio kraštą sudaro dvidešimt kongruenčių taisyklingųjų trikampių (81 pav.). Taisyklingasis ikosaedras turi dvylika kongruenčių taisyklingųjų penkiasienių kampų. Visi jo dvisieniai kampai — kongruentūs ir visi jo plokštieji kampai — kongruentūs (graikiškas žodis „ikosaedras" reiškia dvidešimtsienį).





83 pav.

5. Taisyklingasis dodekaedras. Šio briaunainio kraštą sudaro dvylika kongruenčių taisyklingųjų penkiakampių (82 pav.). Taisyklingasis dodekaedras turi dvidešimt kongruenčių taisyklingųjų trisienių kampų. Visi jo dvisieniai kampai yra kongruentūs ir visi plokštieji kampai — kongruentūs (graikiškas žodis „dodekaedras" reiškia dvylikasienį).



84 pav.



85 pav.

Įrodyta, kad yra tik penkių tipų taisyklingieji briaunainiai.

Taisyklingieji žvaigždiniai briaunainiai yra keturių tipų. Įrodyta, kad tokių briaunainių yra tik keturi (žr. 83—85 pav.).

II SKYRIAUS UŽDAVINIAI

1. Pusplokštumė, kurios kraštas yra dvisienio kampo briauna ir kuri dalija dvisienį kampą į dvi kongruenčias dalis, vadinama to kampo *pusiaukampine plokštuma*. Įrodykite, kad dviejų gretutinių kampų pusiaukampinės plokštumos yra statmenos viena kitai.

2. Jeigu vieno dvisienio kampo sienos yra kito dvisienio kampo sienų tęsiniai, tai tokie dvisieniai kampai vadinami *kryžminiais*. Įrodykite, kad kryžminiai dvisieniai kampai yra kongruentūs.

3. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai lygūs $3\sqrt{2}$ cm ir 14 cm, kampo tarp pagrindo kraštinių didumas lygus 135°, šoninės briaunos ilgis 12 cm. Raskite gretasienio įstrižainių ilgius.

4. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainės ilgis lygus 9 cm. Prizmės viso paviršiaus plotas lygus 144 cm². Raskite prizmės pagrindo kraštinės ir šoninės briaunos ilgius.

5. Stačiakampio gretasienio viso paviršiaus plotas lygus 352 cm^2. Raskite jo matmenis, kai jų santykis yra 1 : 2 : 3.

6. Duota piramidė, kurios aukštinės ilgis lygus 16 m, o pagrindo plotas 512 m^2. Piramidė perkirsta pagrindui lygiagrečia plokštuma 5 m atstumu nuo viršūnės. Raskite pjūvio plotą.

7. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis lygus 14 cm, o įstrižojo pjūvio plotas 14 cm^2. Raskite piramidės šoninės briaunos ilgį.

8. Piramidės pagrindas yra rombas, kurio įstrižainių ilgiai lygūs 12 cm ir 16 cm. Piramidės aukštinė eina per įstrižainių susikirtimo tašką; jos ilgis lygus 6,4 cm. Raskite piramidės viso paviršiaus plotą.

9. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi 28 cm, o šoninė briauna 36 cm. Raskite pagrindo kraštinės ilgį.

10. Įrodykite, kad taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna yra statmena prieš ją esančiai pagrindo briaunai.

11. Įrodykite, kad taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas yra lygus pagrindo plotui, padalytam iš kosinuso kampo tarp šoninės sienos plokštumos ir pagrindo plokštumos.

12. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna du kartus ilgesnė už pagrindo kraštinę. Nubraižykite tos piramidės vaizdą.

13. Kubo briauna lygi a. Kubas perkirstas plokštuma, kuri eina per iš vienos viršūnės išeinančių briaunų galus. Raskite pjūvio plotą.

14. Kubo briauna lygi a. Raskite dviejų prasilenkiančių briaunų vidurio taškus jungiančios atkarpos ilgį.

15. Dviejų taisyklingųjų briaunainių briaunų ilgiai lygūs, o paviršių plotų santykis lygus $\sqrt{3} : 6$. Nustatykite, kokie yra tie briaunainiai.

16. Taisyklingojo briaunainio briauna lygi a, o jo paviršiaus plotas $S=5a^2\sqrt{3}$. Nustatykite, koks tas briaunainis.

17. Raskite dvisienį kampą tarp taisyklingojo tetraedro sienų.

18. Raskite dvisienį kampą tarp gretimų taisyklingojo oktaedro sienų.

III SKYRIUS

Paprasčiausi kreivieji paviršiai ir sukiniai

§ 28. SFERA IR RUTULYS

Aibė visų erdvės taškų, nutolusių nuo taško C atstumu R, vadinama *sfera, kurios centras C ir spindulys R* (86 pav.).

Kitaip sakant, sfera, kurios spindulys R ir centras C, yra aibė visų erdvės taškų M, tenkinančių sąlygą

$$|CM|=R. \qquad (1)$$

Atkarpa, jungianti du sferos taškus ir einanti per jos centrą, vadinama *sferos skersmeniu.* Aišku, sferos, kurios spindulys R, skersmens ilgis lygus $2R$.

Sakykime, erdvėje yra stačiakampė Dekarto koordinačių sistema ir $(a; b; c)$ — taško C koordinatės, o $(x; y; z)$ — taško M koordinatės. Tada (1) sąlygą galima užrašyti šitaip:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R.$$

Iš čia išplaukia, kad sferos, kurios spindulys R ir centras $C(a;\ b;\ c)$, lygtis yra

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{2}$$

Konkrečiu atveju sferos, kurios spindulys lygus R, o centras – koordinačių pradžia, lygtis yra

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{3}$$

1 uždavinys. Reikia sudaryti lygtį sferos, kurios spindulys $R=5$, o centras – koordinačių pradžia.

△ Įrašę spindulio reikšmę į (3) lygtį, gauname $x^2+y^2+z^2=25$. ▲

2 uždavinys. Reikia parašyti lygtį sferos, kurios centras yra $C(2;\ -3;\ 5)$, o spindulys lygus 6.

△ Taško C koordinates ir spindulio reikšmę įrašę į (2) lygtį, gauname $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=36$. ▲

3 uždavinys. Reikia rasti sferos

$$(x+4)^2+(y-3)^2+z^2=100$$

centrą ir spindulį.

△ Palyginę duotąją lygtį su (2) sferos lygtimi, matome, kad $a=-4$, $b=3$, $c=0$, $R=10$. Vadinasi, $C(-4;\ 3;\ 0)$, $R=10$. ▲

4 uždavinys. Duota paviršiaus lygtis

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0.$$

Reikia išaiškinti to paviršiaus geometrines savybes.

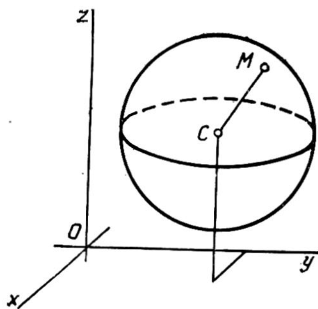
△ Pertvarkykime duotosios lygties kairiąją pusę, išskirdami narių su x, y ir z kvadratus:

$$x^2-2x+y^2+4y+z^2-6z+5=$$
$$=(x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9+$$
$$+5=(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-9.$$

Vadinasi, duotojo paviršiaus lygtis yra

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$$

Ši lygtis aprašo sferą, kurios centras yra $C(1;\ -2;\ 3)$ ir spindulys $R=3$. ▲



86 pav.

Aibė visų erdvės taškų, kurių atstumas nuo taško C yra ne didesnis už skaičių R, vadinama *rutuliu, kurio centras C ir spindulys R.*

Kitaip sakant, rutulys, kurio spindulys R ir centras C, yra aibė visų erdvės taškų M, tenkinančių sąlygą

$$|CM|\leqslant R.$$

Žinant taškų C ir M koordinates, tą sąlygą galima užrašyti ir šitaip:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2.$$

Sfera, kurios spindulys R ir centras C, vadinama atitinkamo *rutulio paviršiumi.* Sakoma, kad ji riboja rutulį, kurio spindulys R ir centras C.

7*

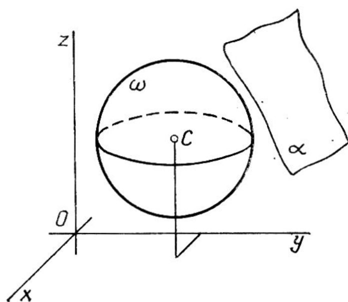
§ 29. PLOKŠTUMOS IR SFEROS TARPUSAVIO PADĖTIS

Sakykime, plokštuma α ir sfera ω (87 pav.) aprašytos lygtimis

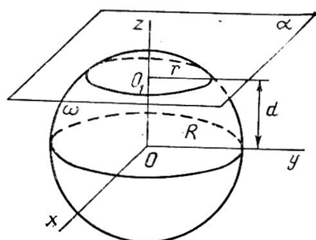
$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (1)$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Išnagrinėsime galimas plokštumos α ir sferos ω tarpusavio padėtis. Plokštuma α gali kirsti sferą, gali liesti ją arba eiti šalia sferos.



87 pav.



88 pav.

Plokštumos ir sferos tarpusavio padėtis išaiškinama išsprendus lygčių sistemą, sudarytą iš plokštumos ir sferos lygčių, t. y. (1), (2) lygčių sistemą.

(1), (2) lygčių sistemos sprendinys priklauso nuo plokštumos lygties koeficientų A, B, C, D, nuo sferos centro koordinačių a, b, c ir nuo sferos spindulio R.

Kad būtų paprasčiau, naujosios koordinačių sistemos pradžia laikykime sferos centrą. Tada nepriklausomai nuo koordinačių ašių krypties sferos lygtis bus

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (3)$$

Atstumą nuo plokštumos α iki sferos ω centro pažymėkime d, o ašies Oz kryptį imkime statmeną plokštumai α. Tada plokštumos α lygtis bus

$$z=d. \qquad (4)$$

Iš (3) ir (4) išplaukia lygtis

$$x^2+y^2=R^2-d^2. \qquad (5)$$

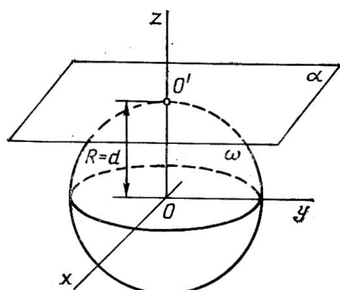
Kai $R>d$ (88 pav.), sankirta yra plokštumos $\alpha\,(z=d)$ apskritimas $x^2+y^2=R^2-d^2$, kurio spindulys $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Jeigu $R=d$ (89 pav.), tai (5) lygtis yra

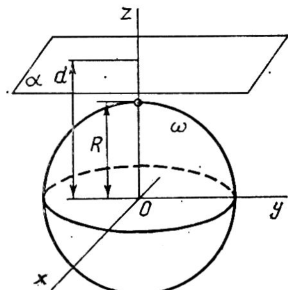
$$x^2+y^2=0.$$

Ją tenkina tik vieno plokštumos α taško O' koordinatės. Vadinasi, aibė $\alpha \cap \omega$ yra sudaryta iš vieno taško.

Plokštuma, turinti su sfera tik vieną bendrą tašką, vadinama tos sferos *liečiamąja plokštuma*. Iš ankstesnių samprotavimų išplaukia, kad sferos liečiamoji plokštuma yra statmena per lietimosi tašką einančiam skersmeniui.



89 pav.



90 pav.

Jeigu $R<d$, tai (5) lygtis virsta šitokia:

$$x^2+y^2=-r^2.$$

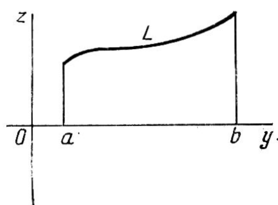
Ji neturi sprendinių. Vadinasi, plokštuma α ir sfera ω nesikerta (90 pav.).

§ 30. SUKIMOSI PAVIRŠIAI

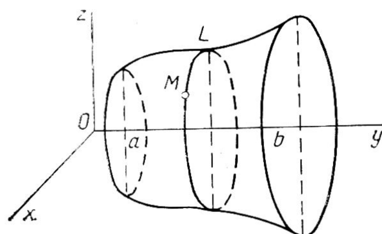
1. Sakykime, plokštumoje α duota kreivė L ir tiesė l. Paviršius, gaunamas kreivę L sukant apie tiesę l, vadinamas *sukimosi paviršiumi*.

Sakykime, kreivė L yra plokštumoje yOz (91 pav.), o jos lygtis –

$$z=f(y), \quad y\in[a;\ b]. \tag{1}$$



91 pav.



92 pav.

Rasime lygtį paviršiaus, kuris gaunamas kreivę L sukant apie ašį Oy (92 pav.). Aišku, taškas $M(x;\ y;\ z)$, $y\in[a;\ b]$ yra to paviršiaus taškas tada ir tik tada, kai

$$\sqrt{x^2+z^2}=|f(y)|.$$

Iš tikrųjų, taškai $(x;\ y;\ z)$ ir $(0;\ y;\ f(y))$ priklauso tam pačiam apskritimui, kurio centras yra $(0;\ y;\ 0)$.

Taigi paviršiaus, kuris gaunamas (1) kreivę sukant apie ašį Oy, lygtis yra

$$x^2+z^2=(f(y))^2,\quad y\in[a;\ b]. \tag{2}$$

Pastebėsime, kad (2) lygtį iš (1) lygties galime gauti šitaip: (1) lygties abi puses keliame kvadratu ir z^2 keičiame x^2+z^2.

Konkrečiu atveju, kai kreivės L lygtis yra

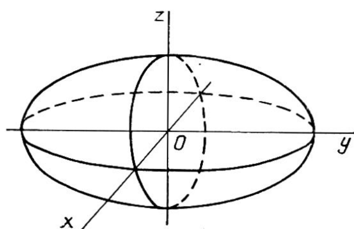
$$z^2=F(y), \tag{3}$$

paviršiaus, kuris gaunamas tą kreivę sukant apie ašį Oy, lygtis yra

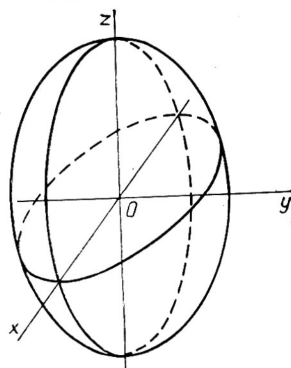
$$x^2+z^2=F(y), \tag{4}$$

t. y. tiesiog z^2 pakeistas x^2+z^2.

2. Paviršius, gaunamas elipsę sukant apie vieną jos ašių, vadinamas *sukimosi elipsoidu*. Sukant elipsę apie jos didžiąją ašį, gaunamas ištęstasis sukimosi elipsoidas (93 pav.), o sukant elipsę apie mažąją ašį, gaunamas suspaustasis sukimosi elipsoidas (94 pav.).



93 pav.



94 pav.

Sakykime, yOz plokštumoje elipsė aprašyta lygtimi

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{5}$$

Sudarysime lygtį paviršiaus, kuris gaunamas elipsę sukant apie ašį Oy. (5) elipsės lygtį galima užrašyti (3) pavidalu. Vadinasi, norint gauti sukimosi elipsoido lygtį, pakanka (5) lygtyje z^2 pakeisti z^2+x^2. Pakeitę gauname

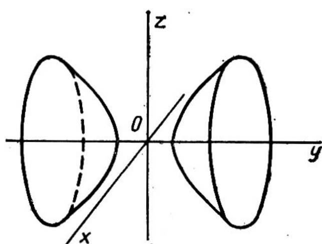
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2+x^2}{c^2}=1. \tag{6}$$

Ta lygtis kartais užrašoma šitaip:

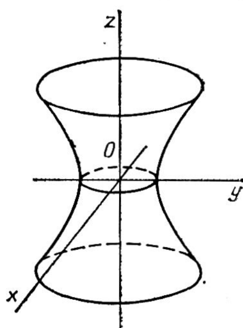
$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{6'}$$

Kai $b>c$, (6) yra ašies Oy kryptimi ištęsto sukimosi elipsoido lygtis; kai $b<c$, (6) yra ašies Oy kryptimi suspausto sukimosi elipsoido lygtis, o kai $b=c$, toji lygtis aprašo sferą.

3. Paviršius, gaunamas hiperbolę sukant apie vieną jos ašių, vadinamas *sukimosi hiperboloidu.* Sukant hiperbolę apie jos realiąją ašį, gaunamas *dvišakis sukimosi hiperboloidas* (95 pav.), o sukant hiperbolę apie jos menamąją ašį, gaunamas *vienašakis sukimosi hiperboloidas* (96 pav.).



95 pav.



96 pav.

Sakykime, yOz plokštumoje hiperbolė aprašyta lygtimi

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{7}$$

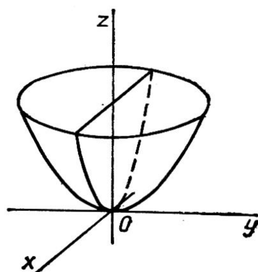
Sudarysime lygtį paviršiaus, kuris gaunamas hiperbolę sukant apie jos realiąją ašį Oy. (7) hiperbolės lygtį galima užrašyti (3) pavidalu. Vadinasi, norint gauti dvišakio sukimosi hiperboloido lygtį, pakanka (7) lygtyje z^2 pakeisti z^2+x^2. Pakeitę gauname

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2+x^2}{c^2}=1. \tag{8}$$

Kai (7) hiperbolė sukama apie jos menamąją ašį, reikia (7) lygtyje y^2 pakeisti y^2+x^2. Pakeitę gauname

$$\frac{y^2+x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{9}$$

4. Paviršius, gaunamas parabolę sukant apie jos simetrijos ašį, vadinamas *sukimosi paraboloidu* (97 pav.).



97 pav.

Sakykime, yOz plokštumoje parabolė aprašyta lygtimi

$$y^2=2pz. \tag{10}$$

Norint gauti sukimosi paraboloido lygtį, reikia (10) lygtyje y^2 pakeisti x^2+y^2. Pakeitę gauname

$$x^2+y^2=2pz. \tag{11}$$

Atkreipsime dėmesį į vieną nuostabią šio paviršiaus savybę. Jeigu sukimosi paraboloido vidinį paviršių padarytume veidrodinį, o jo židinyje (sukimosi paraboloido židinys sutampa su sukamosios parabolės židiniu) įtaisytume šviesos šaltinį, tai visi nuo paraboloido paviršiaus atsispindėję šviesos spinduliai būtų lygiagretūs paraboloido ašiai.

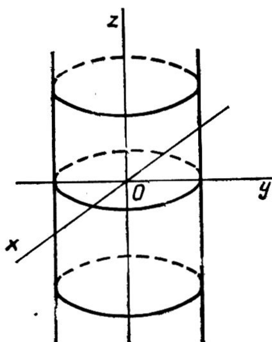
Ši savybė pritaikoma gaminant prožektorius, automobilių žibintus, kino projektorius ir kt.

5. Sukant tiesę apie jai lygiagrečią tiesę, gaunamas *apskritasis cilindrinis paviršius.*

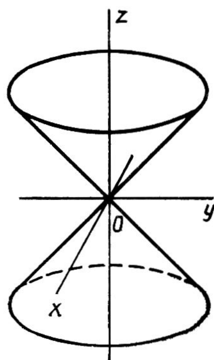
Sakykime, yOz plokštumoje duota tiesė, kurios lygtis yra $y=a$. Remiantis (2) formule, paviršiaus, kuris gaunamas tą tiesę sukant apie ašį Oz, lygtis yra

$$x^2+y^2=a^2.$$

Tas cilindrinis paviršius pavaizduotas 98 paveiksle.



98 pav.



99 pav.

6. Sakykime, duota tiesė, esanti yOz plokštumoje ir einanti per koordinačių pradžią:

$$z=ky, \quad k\neq 0.$$

Remiantis (2) formule, paviršiaus, kuris gaunamas tą tiesę sukant apie ašį Oz, lygtis yra

$$x^2+z^2=k^2y^2.$$

Gautasis paviršius vadinamas *apskrituoju kūginiu paviršiumi* (99 pav.).

§ 31. CILINDRINIAI PAVIRŠIAI

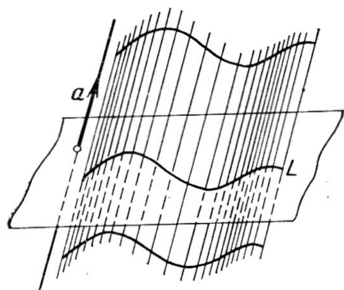
Jeigu per kiekvieną kreivės L tašką išvesime tiesę, lygiagrečią vektoriui **a**, tai gausime vadinamąjį *cilindrinį paviršių.* Vektoriui **a** lygiagrečios tiesės, kurios yra cilindriniame paviršiuje, vadinamos to paviršiaus *sudaromosiomis*; kreivė L vadinama cilindrinio paviršiaus *vedamąja* (100 pav.).

Jeigu cilindrinio paviršiaus ir jo sudaromosioms statmenos plokštumos sankirta (normalinis pjūvis) yra apskritimas, tai cilindrinis paviršius vadinamas *apskrituoju,* jeigu elipsė – *elipsiniu,* jeigu parabolė – *paraboliniu.*

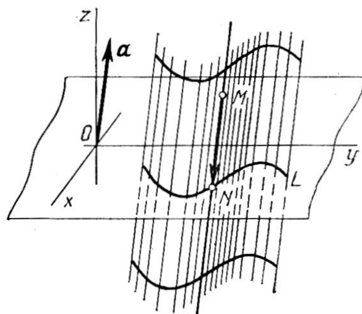
Sakykime, erdvėje yra stačiakampė koordinačių sistema $Oxyz$, o plokštumoje xOy duota kreivė L, kurios lygtis atitinkamoje tos plokštumos koordinačių sistemoje yra:

$$F(x, y)=0. \qquad (1)$$

Sudarysime lygtį cilindrinio paviršiaus, kurio vedamoji yra kreivė L, o sudaromosios lygiagrečios vektoriui $\mathbf{a}=(\alpha; \beta; \gamma)$, $\gamma \neq 0$ (101 pav.).



100 pav.



101 pav.

Išnagrinėkime bet kurį to paviršiaus tašką $M(x; y; z)$. Per tašką M einanti sudaromoji l kerta plokštumą xOy kreivės L taške N. Jeigu taško N erdvines koordinates pažymėsime $(x_1; y_1; 0)$, tai vektoriaus $\overrightarrow{MN}$ koordinatės bus $(x_1-x; y_1-y; 0-z)$.

Iš cilindrinio paviršiaus apibrėžimo išplaukia, kad vektoriai $\mathbf{a}$ ir $\overrightarrow{MN}$ yra kolinearūs, t. y.

$$\overrightarrow{MN}=\lambda \mathbf{a}.$$

Vadinasi,

$$x_1-x=\lambda\alpha, \quad y_1-y=\lambda\beta, \quad 0-z=\lambda\gamma.$$

Išsprendę šią lygčių sistemą λ, x_1 ir y_1 atžvilgiu, gauname

$$\lambda=-\frac{z}{\gamma}, \quad x_1=x-z\frac{\alpha}{\gamma}, \quad y_1=y-z\frac{\beta}{\gamma}. \qquad (2)$$

Kadangi taškas N priklauso kreivei L, tai $F(x_1, y_1)=0$. Pakeitę x_1 ir y_1 jų išraiškomis iš (2) formulių, gauname ieškomąją cilindrinio paviršiaus lygtį

$$F\left(x-z\frac{\alpha}{\gamma}, \; y-z\frac{\beta}{\gamma}\right)=0. \qquad (3)$$

Uždavinys. Reikia sudaryti lygtį cilindrinio paviršiaus, kurio xOy plokštumoje esančios vedamosios lygtis yra $x^2+y^2=4$, o sudaromosios lygiagrečios vektoriui $\mathbf{a}=(0; 1; 1)$.

△ Iš uždavinio sąlygos randame $F(x, y)=x^2+y^2-4$ ir $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=1$. Remiantis (3) formule, ieškomoji cilindrinio paviršiaus lygtis yra

$$\left(x-z\cdot\frac{0}{1}\right)^2+\left(y-z\cdot\frac{1}{1}\right)^2-4=0,$$

arba

$$x^2+(y-z)^2-4=0.$$

Tas paviršius pavaizduotas 102 paveiksle. ▲

Analogiškai galima įrodyti štai ką: jeigu cilindrinio paviršiaus vedamoji L yra plokštumoje xOz ir ji aprašoma lygtimi $F(x, z)=0$, o vektorius **a** nėra lygiagretus tai plokštumai, tai to cilindrinio paviršiaus lygtis yra

$$F\left(x-y\frac{\alpha}{\beta},\ z-y\frac{\gamma}{\beta}\right)=0.$$

102 pav.

Pagaliau jeigu kreivė L aprašoma lygtimi $F(y, z)=0$ ir vektorius **a** nėra lygiagretus plokštumai yOz, tai cilindrinio paviršiaus lygtis yra

$$F\left(y-x\frac{\beta}{\alpha},\ z-x\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0.$$

Pastebėsime štai ką: jeigu cilindrinio paviršiaus vedamoji yra plokštumoje xOy, o sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz, tai cilindrinio paviršiaus lygtis erdvės koordinačių sistemoje sutampa su vedamosios lygtimi ir yra

$$F(x, y)=0. \tag{4}$$

Jeigu (4) lygtis yra plokštumos taškų aibės lygtis, tai ji apibrėžia kreivę L; jeigu (4) lygtis yra erdvės taškų aibės lygtis, tai ji apibrėžia cilindrinį paviršių.

Taigi kiekvieną lygčių

$$F(x, y)=0, \quad F(x, z)=0, \quad F(y, z)=0$$

galima aiškinti dvejopai. Jeigu ta lygtis yra plokštumos taškų aibės lygtis, tai ji yra lygties kintamųjų plokštumoje esančios kreivės L lygtis. Jeigu ta lygtis yra erdvės taškų aibės lygtis, tai ji apibrėžia cilindrinį paviršių, kurio vedamoji yra lygties kintamųjų plokštumoje, o sudaromosios lygiagrečios ašiai to kintamojo, kurio lygtyje nėra.

Išnagrinėsime keletą pavyzdžių.

1. Lygtis

$$x^2+y^2=r^2$$

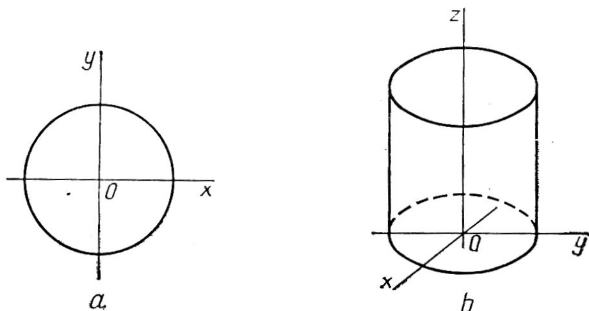
plokštumoje xOy apibrėžia apskritimą, kurio centras yra koordinačių pradžia ir spindulys r (103 pav., *a*). Ta pati lygtis erdvėje apibrėžia apskri-

tąjį cilindrinį paviršių, kurio vedamoji yra plokštumos xOy apskritimas, o sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz (103 pav., *b*).

2. Lygtis

$$x^2+z^2=4$$

plokštumoje xOz nustato apskritimą, kurio centras yra koordinačių pradžia ir spindulys $r=2$ (104 pav., *a*). Ta pati lygtis erdvėje nustato aps kr-



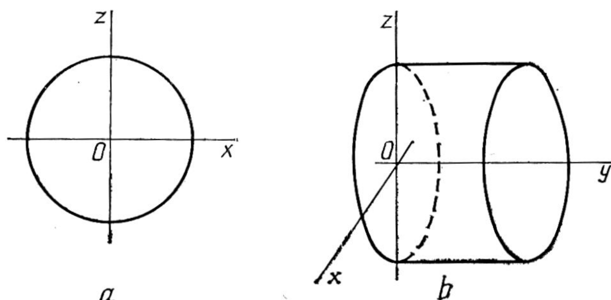
103 pav.

tąjį cilindrinį paviršių, kurio vedamoji yra plokštumos xOz apskritimas, o sudaromosios lygiagrečios ašiai Oy (104 pav., *b*).

3. Lygtis

$$y^2+z^2+9=0$$

nieko neapibrėžia nei plokštumoje, nei erdvėje, nes neneigiamų skaičių suma negali būti neigiamas skaičius.



104 pav.

4. Lygtis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

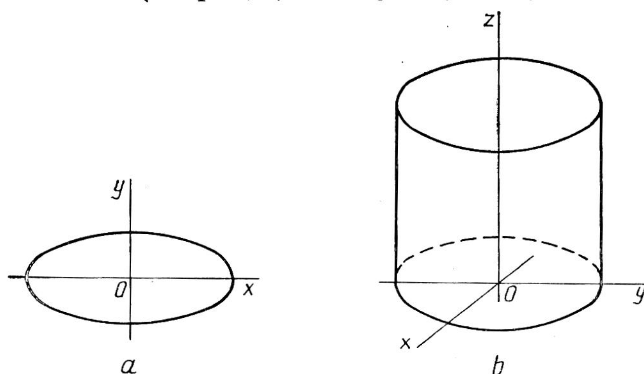
plokštumoje xOy apibrėžia elipsę, kurios centras yra koordinačių pradžia, o pusašės a ir b (105 pav., *a*). Ta pati lygtis erdvėje apibrėžia elip-

sinį cilindrinį paviršių, kurio vedamoji yra plokštumoje xOy, o sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz (105 pav., b).

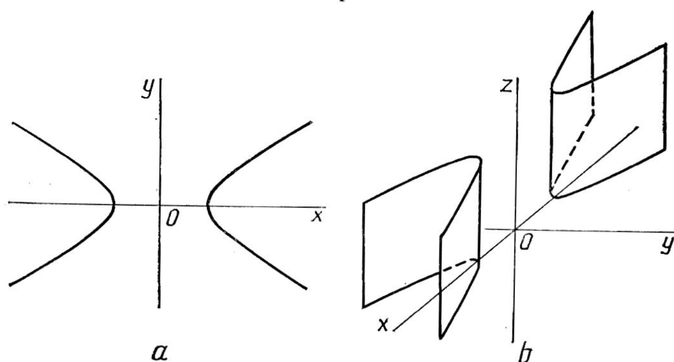
5. Lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

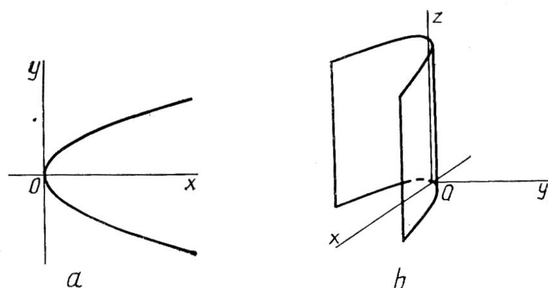
plokštumoje xOy apibrėžia hiperbolę, kurios centras yra koordinačių pradžia, o pusašės a ir b (106 pav., a). Erdvėje ši lygtis apibrėžia hiperbo-



105 pav.



106 pav.



107 pav.

linį cilindrinį paviršių, kurio sudaromosios yra lygiagrečios ašiai Oz (106 pav., *b*).

6. Lygtis

$$y^2 = 2px$$

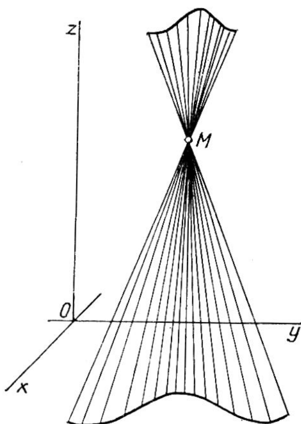
plokštumoje xOy apibrėžia parabolę (107 pav., *a*), o erdvėje – parabolinį cilindrinį paviršių, kurio sudaromosios yra lygiagrečios ašiai Oz (107 pav., *b*).

§ 32. KŪGINIAI PAVIRŠIAI

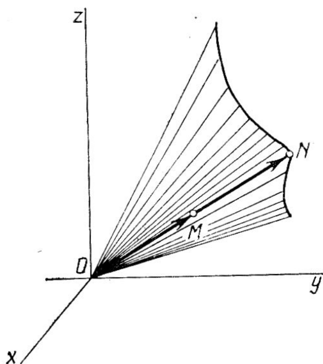
Per kreivės taškus ir kurį nors fiksuotą erdvės tašką, nepriklausantį tai kreivei, išveskime tieses. Visų tų tiesių sąjunga vadinama *kūginiu paviršiumi.* Ta kreivė vadinama kūginio paviršiaus *vedamąja,* fiksuotasis taškas – *viršūne,* o tiesės – *sudaromosiomis* (108 pav.).

Lengva matyti, kad kūginis paviršius yra sudarytas iš dviejų dalių, turinčių bendrą viršūnę.

Kūginiai paviršiai pasižymi nuostabia savybe: neraukšlėjant ir neplėšiant juos galima užkloti ant plokštumos (išlenkti į plokštumą). Atvirkščiai, iš plokščio lapo galima sulenkti kūginį paviršių. Dėl tos savybės kūginiai paviršiai plačiai pritaikomi technikoje.



108 pav.



109 pav.

Paprasčiausia išvesti kūginio paviršiaus parametrines lygtis. Tam reikia turėti vedamosios parametrines lygtis.

Vaizduokimės, kad kreivė erdvėje yra judančio taško M trajektorija ir kiekvienu laiko momentu t yra žinomos to taško koordinatės x, y, z iš anksto pasirinktos koordinačių sistemos atžvilgiu:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{1}$$

(1) lygtys vadinamos *kreivės erdvėje parametrinėmis lygtimis.*

Kad būtų paprasčiau, tarkime, jog kūginio paviršiaus viršūnė yra koordinačių pradžia (109 pav.), o vedamoji aprašyta (1) lygtimis.

Sakykime, $M(x; y; z)$ – bet kuris kūginio paviršiaus taškas, o per tą tašką einanti sudaromoji kerta vedamąją taške N, kurio koordinatės yra $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$. Vektoriai $\overrightarrow{OM}$ ir $\overrightarrow{ON}$ – kolinearūs, todėl yra toks skaičius λ, kad $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{ON}$. Tą lygybę užrašę koordinatėmis, kūginio paviršiaus bet kurio taško koordinates išreikšime parametrais λ ir t:

$$x=\lambda f_1(t), \quad y=\lambda f_2(t), \quad z=\lambda f_3(t). \tag{2}$$

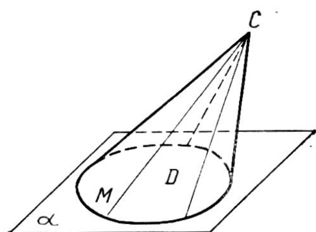
Lengva įsitikinti, jog nėra tokių λ ir t reikšmių, kad kūginiam paviršiui nepriklausančio taško koordinatės tenkintų tas lygtis.

§ 33. KŪGIS IR NUPJAUTINIS KŪGIS

Imkime aprėžtąją figūrą D plokštumoje α ir erdvės tašką C, nesantį toje plokštumoje.

Visų atkarpų CM, $M \in D$, sąjunga vadinama *kūgiu, kurio viršūnė yra taškas C, o pagrindas – figūra D* (110 pav.).

Statmens kūgio pagrindo plokštumai atkarpa, kurios galai yra kūgio viršūnė ir statmens pagrindas, vadinama *kūgio aukštine*. Tos atkarpos ilgis irgi vadinamas kūgio aukštine.

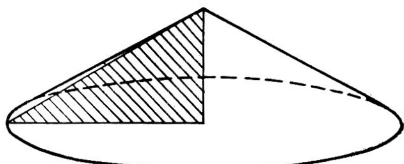


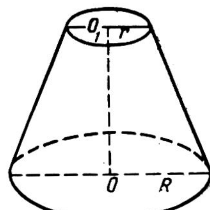
110 pav.

Akivaizdu, kad kūgį, kurio viršūnė C ir pagrindas D, riboja plokštuma α ir kūginis paviršius, kurio viršūnė yra taškas C, o vedamoji yra figūros D kraštas. Ta kūginio paviršiaus dalis, kuri yra kūgio krašte, vadinama *kūgio šoniniu paviršiumi*.

Jeigu kūgio pagrindas yra skritulys ir kūgio viršūnės projekcija yra pagrindo centras, tai toks kūgis vadinamas *stačiu apskrituoju kūgiu*.

Statų apskritąjį kūgį galima gauti statųjį trikampį sukant apie vieną jo statinių (111 pav.). Tada įžambinė apibrėžia kūgio šoninį paviršių, o statinis, nesantis sukimosi ašyje, – pagrindą.


111 pav.



112 pav.

Kūgio dalis, esanti tarp jo pagrindo ir kūgį kertančios bei pagrindui lygiagrečios plokštumos β, vadinama *nupjautiniu kūgiu*. Plokštumos β dalis, kuri yra nupjautinio kūgio krašte, vadinama *viršutiniu pagrindu*;

tada plokštumos α figūra D vadinama *apatiniu pagrindu.* Nupjautinio kūgio *aukštine* vadinamas atstumas tarp jo pagrindų plokštumų.

Nupjautinį kūgį, kuris yra stataus apskritojo kūgio dalis, galima gauti lygiašonę trapeciją sukant apie jos simetrijos ašį (112 pav.). Tada trapecijos šoninė kraštinė apibrėžia nupjautinio kūgio šoninį paviršių, viršutinis trapecijos pagrindas – viršutinį kūgio pagrindą, apatinis trapecijos pagrindas – apatinį kūgio pagrindą.

Bendruoju atveju kūgio pagrindas gali būti bet kuri aprėžtoji figūra, pavyzdžiui, bet kuris daugiakampis. Todėl kiekviena piramidė yra kūgis.

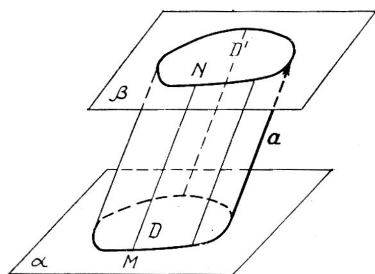
Jeigu kūgio pagrindas yra figūra, kurią riboja elipsė, tai kūgis vadinamas *elipsiniu.* Akivaizdu, kad status apskritasis kūgis yra elipsinio kūgio atskiras atvejis.

§ 34. CILINDRAS

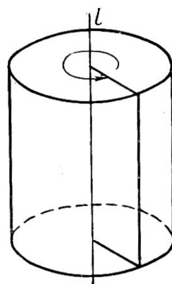
Imkime aprėžtąją figūrą D plokštumoje α ir vektorių **a**, nelygiagretų plokštumai α.

Visų atkarpų MN, $M \in D$ ir $\overrightarrow{MN} = \mathbf{a}$, sąjunga vadinama *cilindru, kurio pagrindas yra D* (113 pav.).

Akivaizdu, kad lygiagrečiuoju postūmiu (vektoriumi) **a** iš figūros D gauta figūra D' yra plokštumoje β, lygiagrečioje plokštumai α. Be to, figūra D' yra kongruenti figūrai D.



113 pav.



114 pav.

Figūros D ir D' vadinamos *cilindro pagrindais.* Atstumas tarp pagrindų plokštumų vadinamas *cilindro aukštine.*

Cilindrinio paviršiaus dalis, kuri yra cilindro krašte, vadinama *cilindro šoniniu paviršiumi.*

Jeigu cilindro pagrindas yra skritulys ir cilindrinio paviršiaus sudaromosios statmenos pagrindų plokštumoms, tai toks cilindras vadinamas *stačiu apskrituoju cilindru,* arba *ritiniu.*

Ritinį galima gauti stačiakampį sukant apie vieną jo kraštinių (114 pav.). Tada stačiakampio kraštinė, lygiagreti sukimosi ašiai, bet nesanti joje, brėžia ritinio šoninį paviršių, o sukimosi ašiai statmenos kraštinės – ritinio pagrindus.

Bendruoju atveju cilindro pagrindas gali būti bet kuri aprėžtoji figūra, pavyzdžiui, bet kuris daugiakampis. Todėl kiekviena prizmė yra cilindras.

Jeigu cilindro pagrindas yra figūra, kurią riboja elipsė, tai cilindras vadinamas *elipsiniu*. Atskirai imant, ritinys yra elipsinis cilindras.

III SKYRIAUS UŽDAVINIAI

1. Kokie paviršiai aprašomi šiomis lygtimis:

a) $x^2+y^2=25$;

b) $x^2+y^2+z^2=25$;

c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

d) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$?

2. Elipsė, kurios pusašės yra $a=6$, $b=4$, o centras sutampa su koordinačių pradžia, sukama apie mažąją ašį, kuri yra ašyje Oz. Sudarykite gautojo paviršiaus lygtį. Nubraižykite brėžinį.

3. Elipsė, kurios pusašės yra $a=6$, $b=4$, o centras sutampa su koordinačių pradžia, sukama apie didžiąją ašį, kuri yra ašyje Oz. Sudarykite gautojo sukimosi paviršiaus lygtį. Nubraižykite brėžinį.

4. Sudarykite lygtį paviršiaus, kuris gaunamas elipsę

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{14}=1$$

sukant apie ašį Oy.

5. Sudarykite lygtį paviršiaus, kuris gaunamas hiperbolę sukant apie realiąją ašį, sutampančią su ašimi Ox. Hiperbolės pusašės $a=8$, $b=6$, o jos centras sutampa su koordinačių pradžia. Nubraižykite brėžinį.

6. Hiperbolė, kurios pusašės yra $a=3$, $b=4$, sukama apie menamąją ašį, sutampančią su ašimi Oz. Hiperbolės centras sutampa su koordinačių pradžia. Sudarykite gautojo paviršiaus lygtį. Nubraižykite brėžinį.

7. Sudarykite lygtį paviršiaus, kuris gaunamas parabolę

$$y^2=2x$$

sukant apie ašį Ox.

8. Sudarykite tiesės $2x=3z$ sukimosi apie ašį Ox paviršiaus lygtį. Nubraižykite brėžinį.

9. Sudarykite hiperbolės

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

sukimosi apie ašį Oz paviršiaus lygtį. Nubraižykite brėžinį.

10. Sudarykite parabolės $y^2=6z$ sukimosi apie ašį Oz paviršiaus lygtį. Nubraižykite brėžinį.

11. Sudarykite tiesės $x-3=0$ sukimosi apie ašį Oz paviršiaus lygtį. Nubraižykite brėžinį.

12. Nustatykite paviršiaus $14x=y^2+z^2$ rūšį. Pavaizduokite tą paviršių.

13. Nustatykite, koks paviršius aprašomas lygtimi

$$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{12}=1$$

ir kokia jo ir plokštumos

$$z-1=0$$

susikirtimo linija.

14. Nustatykite, koks paviršius aprašomas lygtimi

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{8}=1$$

ir kokia jo ir plokštumos

$$z+2=0$$

susikirtimo linija.

15. Nustatykite, koks paviršius aprašomas lygtimi

$$x^2+y^2-4z=0$$

ir kokia jo ir plokštumos

$$x-2=0$$

susikirtimo kreivė.

16. Cilindrinio bako skersmuo lygus 6 m, o aukštis 12 m. Raskite jo paviršiaus plotą.

17. Vieno cilindrinio bako skersmuo 3 m, aukštis 4 m; kito cilindrinio bako skersmuo 4 m, aukštis 3 m. Nustatykite, kurio bako paviršiaus plotas yra didesnis.

18. Sferos centras yra plokštumoje $z=4$, sfera liečia plokštumą xOy taške $M(2;3;0)$ Sudarykite sferos lygtį ir raskite jos centro koordinates.

19. Taškai A $(3;\ -5;6)$ ir B $(5;7;\ -1)$ yra vieno sferos skersmens galai. Sudarykite tos sferos lygtį.

20. Raskite taško koordinates, kai tas taškas yra simetriškas sferos

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=24$$

centrui jos liečiamosios plokštumos taške $M(-1;\ 0;\ 3)$ atžvilgiu.

21. Duoti keturi taškai: $A(2;\ -5;8)$, $B(8;\ -2;5)$, $C(5;\ -8;2)$ ir $D(-2;\ -8;\ -5)$. Sudarykite per juos einančios sferos lygtį.

22. Sfera, kurios centras yra taškas $(2;\ 3;\ -4)$, liečia sferą

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=6.$$

Sudarykite tos sferos lygtį.

23. Sfera liečia dvi sferas:

$$(x-5)^2+(y+2)^2+(z-6)^2=16,$$

$$(x-5)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=9,$$

o jos centras yra duotųjų sferų centrų linijoje. Sudarykite tos sferos lygtį.

24. Taškai A $(7;\ -2;\ 4)$ ir B $(9;\ -8;\ 6)$ priklauso sferai ir per jos centrą einančiai tiesei. Sudarykite sferos lygtį.

25. Parašykite lygtį sferos, kurios centras yra koordinačių pradžia, o spindulys $R=6$.

26. Taškas $M(-2;\ 2;\ 1)$ priklauso sferai, kurios centras yra koordinačių pradžia. Sudarykite sferos lygtį.

27. Duota sfera $x^2+y^2+z^2=9$ ir trys taškai: $A(2;\ -1;1)$, $B(2;2;\ -1)$, $C(-1;\ -2;\ 5)$. Nustatykite, kuris iš tų taškų yra sferos viduje, kuris priklauso sferai ir kuris yra sferos išorėje.

28. Kokie paviršiai aprašomi šiomis lygtimis:

a) $x^2+y^2+z^2=9$;

b) $x^2+y^2+z^2=6z$;

c) $x^2+y^2+z^2=4y+5$;

d) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=2$?

IV SKYRIUS

Kūnų tūriai ir paviršių plotai

§ 35. BRIAUNAINIO TŪRIO SĄVOKA. GRETASIENIO TŪRIS

1. Tūrių matavimo uždavinį žinote iš aštuonmetės mokyklos geometrijos kurso. Briaunainio tūris siejamas su tą briaunainį užpildančių kubų skaičiumi. Tų kubų briauna lygi ilgio matavimo vienetui (po to ir jo dalims). Būtent, tūrio matavimo vienetu laikomas tūris kubo, kurio briaunos ilgis lygus e (e — ilgio matavimo vienetas); jis žymimas e^3. Tada briaunainio tūris šiuo matavimo vienetu išreiškiamas lygybe $V = ve^3$; čia v — tūrio skaitinė reikšmė, kai matavimo vienetas yra e^3. Toliau laikysime, kad matavimo vienetas yra parinktas, ir, kalbėdami apie briaunainio tūrį, turėsime galvoje tūrio skaitinę reikšmę. Tūrių matavimo uždavinys bus išspręstas, jeigu kiekvienam briaunainiui Φ priskirsime tam tikrą neneigiamą skaičių $V(\Phi)$, vadinamą *tūriu*. Tūriui būdingos šitokios savybės.

1. Kongruenčių briaunainių Φ_1 ir Φ_2 tūriai yra lygūs (*invariantiškumas*): $V(\Phi_1) = V(\Phi_2)$.

2. Jeigu briaunainis Φ yra sąjunga briaunainių $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, iš kurių jokie du neturi bendrų vidinių taškų, tai jo tūris lygus visų tų briaunainių tūrių sumai (*adityvumas*):

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2) + \ldots + V(\Phi_n).$$

3. Kubo E, kurio briauna yra lygi ilgio matavimo vienetui, tūris lygus vienetui ir yra laikomas tūrio matavimo vienetu:

$$V(E) = 1.$$

Iš 2 savybės išplaukia, kad tūriui būdinga šitokia *monotoniškumo* savybė.

Briaunainio Φ dalies Φ_1 tūris yra ne didesnis už viso briaunainio Φ tūrį:

$$V(\Phi_1) \leqslant V(\Phi).$$

Briaunainiai, kurių tūriai yra vienodi, vadinami *lygiatūriais*. Pastebėsime, kad lygiadaliai briaunainiai yra lygiatūriai.

2. Stačiakampio gretasienio tūris.

1 teorema. *Stačiakampio gretasienio tūris lygus trijų jo matmenų sandaugai.*

□ Tuo atveju, kai gretasienio Φ visi trys matmenys a, b ir c yra racionalieji skaičiai, šios teoremos įrodymas išnagrinėtas VIII klasės geometrijos kurse. Todėl teoremą įrodysime tuo atveju, kai bent vienas iš jo matmenų

a, b ir c yra iracionalusis skaičius. Įrodydami remsimės išnagrinėtuoju atveju.

Skaičių a, b, c dešimtainius 10^{-n} tikslumo artinius su trūkumu ir su pertekliumi pažymėkime atitinkamai a_n, b_n, c_n ir a'_n, b'_n, c'_n.

Išnagrinėkime gretasienius Φ_n ir Φ'_n, kurių matmenys yra a_n, b_n, c_n ir a'_n, b'_n, c'_n.

Kadangi realiųjų skaičių dešimtainiai artiniai yra racionalieji skaičiai, tai

$$V(\Phi_n) = a_n b_n c_n \text{ ir } V(\Phi'_n) = a'_n b'_n c'_n.$$

Remiantis tūrio monotoniškumu,

$$V(\Phi_n) < V(\Phi) < V(\Phi'_n).$$

Vadinasi,

$$a_n b_n c_n < V(\Phi) < a'_n b'_n c'_n. \quad (1)$$

(1) nelygybėje perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname

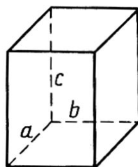
$$V(\Phi) = abc. \ \blacksquare$$

Išvada. *Stačiakampio gretasienio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.*

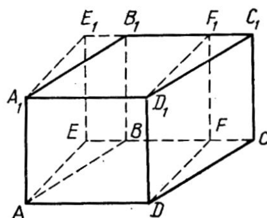
□ Įrodėme, kad stačiakampio gretasienio tūris yra apskaičiuojamas pagal formulę

$$V = abc;$$

čia a, b ir c — gretasienio ilgis, plotis ir aukštis (115 pav.).



115 pav.



116 pav.

Kadangi stačiakampio gretasienio pagrindas yra stačiakampis, o šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai, tai $ab = Q$ — gretasienio pagrindo plotas, o $c = H$ — jo aukštinė. Taigi

$$V = abc = QH. \ \blacksquare$$

3. Stačiojo gretasienio tūris.

2 teorema. *Stačiojo gretasienio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.*

□ Sakykime, duotas statusis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio pagrindas yra lygiagretainis $ABCD$ (116 pav.). Per briaunas AA_1 ir DD_1 išveskime plokštumas AA_1E_1E ir DD_1F_1F, statmenas (BC), ir sukonstruokime stačiakampį gretasienį $AEFDA_1E_1F_1D_1$. Įrodysime, kad gautas sta-

čiakampis gretasienis ir duotas statusis gretasienis yra lygiatūriai. Trikampė prizmė $AEBA_1E_1B_1$ yra kongruenti trikampei prizmei $DFCD_1F_1C_1$, nes egzistuoja lygiagretusis postūmis $\overrightarrow{AD}$, kuriuo pirmoji prizmė atvaizduojama į antrąją. Taigi gretasieniai $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ir $AEFDA_1E_1F_1D_1$ yra lygiadaliai, todėl ir lygiatūriai. Remiantis išvada, stačiakampio gretasienio tūris

$$V=S_{AEFD}H.$$

Kadangi stačiakampis $AEFD$ ir lygiagretainis $ABCD$ yra lygiapločiai, t. y. $S_{AEFD}=S_{ABCD}$, tai stačiojo gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tūris

$$V=S_{ABCD}H. \blacksquare$$

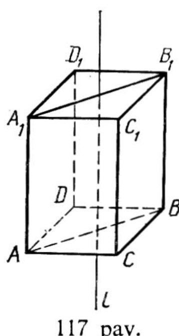
§ 36. STAČIOSIOS PRIZMĖS TŪRIS

Teorema (stačiosios prizmės tūrio teorema). *Stačiosios prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.*

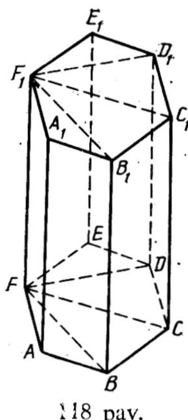
□ Išnagrinėkime du atvejus.

1. Sakykime, prizmės pagrindas – trikampis ABC (117 pav.), o jos aukštinė lygi H. Plokštuma AA_1B_1B yra statmena pagrindo plokštumai, todėl AA_1B_1B – stačiakampis. Jo simetrijos ašį, statmeną prizmės pagrindo plokštumai, pažymėkime l. Stačiajai prizmei $ABCA_1B_1C_1$ simetriška tiesės l atžvilgiu figūra yra jai kongruenti stačioji prizmė $ABDA_1B_1D_1$. Tų prizmių sąjunga yra statusis gretasienis $ADBCA_1D_1B_1C_1$, kurio tūris lygus

$$S_{ADBC}H;$$



117 pav.



118 pav.

čia H – gretasienio aukštinė, kuri sutampa su prizmės aukštine. Kadangi kongruenčių prizmių tūriai yra lygūs, tai duotosios prizmės tūris lygus pusei gretasienio tūrio. Vadinasi, prizmės tūris

$$V=\frac{1}{2}S_{ADBC}H=S_{\triangle ABC}H=QH;$$

čia Q ir H – duotosios prizmės pagrindo plotas ir aukštinė.

2. Sakykime, duota n-kampė stačioji prizmė ($n>3$) (118 pav.), kurios aukštinė lygi H ir pagrindo plotas Q.

Per vieną prizmės šoninių briaunų, pavyzdžiui per $[FF_1]$, išveskime įstrižuosius pjūvius. Jie duotąją prizmę padalys į $n-2$ stačiąsias trikampes prizmes, kurių aukštinės lygios H, o pagrindų plotai lygūs Q_1, Q_2 ..., Q_{n-2}; be to, $Q_1+Q_2+\ldots+Q_{n-2}=Q$.

Remiantis tūrių adityvumu, duotosios prizmės tūris lygus gautųjų trikampių prizmių tūrių sumai. Todėl

$$V=Q_1H+Q_2H+\ldots+Q_{n-2}H=H(Q_1+Q_2+\ldots+Q_{n-2})=HQ. \blacksquare$$

§ 37. KŪNO TŪRIO SĄVOKA. STAČIOJO CILINDRO TŪRIS

1. Remdamiesi briaunainio tūrio sąvoka, spręsime aprėžtojo kūno tūrio matavimo uždavinį.

Sakykime, erdvėje duotas kūnas D, kurio kraštas yra uždarasis paviršius. Kiekvieną briaunainį K, kuriame yra kūnas D, vadinsime *apibrėžtiniu* apie kūną D, o kiekvieną briaunainį, kuris yra kūno D viduje, vadinsime *įbrėžtiniu* į kūną D.

Apibrėžimas. Kūnas D vadinamas *kubuojamu*, jeigu egzistuoja tokia kūno D apibrėžtinių briaunainių seka (K_n) ir tokia to kūno įbrėžtinių briaunainių seka (k_n), kad tų briaunainių tūrių sekos turi bendrą ribą:

$$\lim_{n\to\infty} V(K_n)=\lim_{n\to\infty} V(k_n)=V.$$

Tada skaičius V vadinamas *kūno D tūriu*.

Pastebėsime, kad taip apibrėžtam kūno tūriui būdingos savybės, analogiškos briaunainių tūrio 1—3 savybėms.

Pastaba. Iš apibrėžimo išplaukia, kad kūnas D yra kubuojamas ir jo tūris lygus V, jeigu egzistuoja kūno D tokia apibrėžtinių kubuojamų kūnų (nebūtinai briaunainių) seka ir tokia įbrėžtinių kubuojamų kūnų seka, kad tų kūnų tūrių sekos turi bendrą ribą V.

2. Stačiojo cilindro tūris.

Teorema. *Statusis cilindras, kurio pagrindas — kvadruojamoji figūra σ, o aukštinė lygi h, yra kubuojamas kūnas; jo tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai, t. y. $V=S\cdot h$.*

□ Kadangi cilindro pagrindas yra kvadruojamoji figūra σ, tai egzistuoja figūros σ apibrėžtinių daugiakampių seka (Q_n) ir įbrėžtinių daugiakampių seka (q_n); be to,

$$\lim_{n\to\infty} S(Q_n)=\lim_{n\to\infty} S(q_n)=S.$$

Sudarykime cilindrų sekas (K_n) ir (k_n). Tų cilindrų pagrindai yra nagrinėtieji figūros σ apibrėžtiniai ir įbrėžtiniai daugiakampiai, o sudaromosios lygiagrečios duotojo cilindro sudaromosioms ir jų ilgis lygus h. Duotojo

cilindro apibrėžtiniai cilindrai K_n ir įbrėžtiniai cilindrai k_n yra prizmės, todėl jų tūriai yra

$$V(K_n)=S(Q_n)\,h \text{ ir } V(k_n)=S(q_n)\,h.$$

Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} S(Q_n)=\lim_{n\to\infty} S(q_n)=S,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} V(K_n)=\lim_{n\to\infty} V(k_n)=Sh,$$

t. y. cilindras yra kubuojamas kūnas ir jo tūris

$$V=S\cdot h. \blacksquare$$

Išvada. *Ritinio, kurio pagrindo spindulys R ir aukštinė H, tūris lygus*

$$V=\pi R^2 H.$$

□ Kadangi ritinio pagrindas yra skritulys, tai jo plotas $S=\pi R^2$. Todėl ritinio tūris

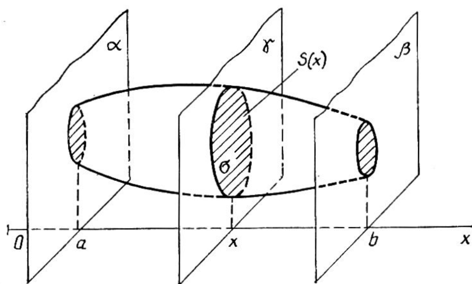
$$V=S\cdot H=\pi R^2 H. \blacksquare$$

§ 38. KŪNO TŪRIO REIŠKIMAS JO LYGIAGREČIŲ PJŪVIŲ PLOTAIS

Nagrinėkime kūną D, kurį riboja plokštumos α ir β, statmenos ašiai Ox ir einančios per taškus $x=a$ ir $x=b$ (119 pav.). Tarkime, kad kūnui D būdingos šitokios savybės.

1. Kūną D perkirtus bet kokia plokštuma, statmena ašiai Ox ir einančia per tašką x, gautasis pjūvis yra kvadruojamoji figūra σ, kurios plotas yra tolydžiosios funkcijos $S(x)$ reikšmė; $x\in[a;\ b]$.

2. Kūną D perkirtus dviem bet kokiomis ašiai Ox statmenomis plokštumomis, vieno gautųjų pjūvių statmenoji projekcija plokštumoje α yra kito pjūvio projekcijoje.



119 pav.

Kūną D, pasižymintį 1 ir 2 savybėmis, vadinsime *leistinų lygiagrečiųjų pjūvių kūnu.*

Teorema. *Leistinų lygiagrečiųjų pjūvių kūnas yra kubuojamas; jo tūris*

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \tag{1}$$

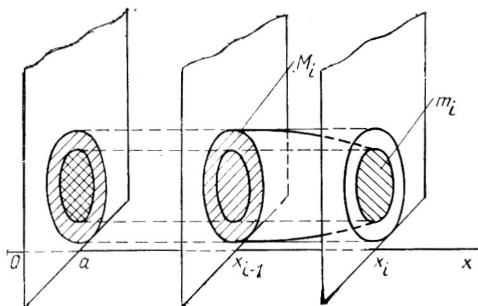
□ Taškais

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}\,i, \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

padalykime atkarpą $[a; b]$ į n dalių $[x_{i-1}; x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, turinčių vienodą ilgį

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Per dalijimo taškus x_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ išveskime ašiai Ox statmenas plokštumas. Tuo pačiu kūną D padalysime į n sluoksnių. Žinoma, kad tolydi atkarpoje funkcija toje atkarpoje įgyja ir mažiausią, ir didžiausią reikšmę. Funkcijos $S(x)$ mažiausią ir didžiausią reikšmes atkarpoje $[x_{i-1}; x_i]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ žymėkime m_i ir M_i. Išskirkime sluoksnį, atitinkantį atkarpą $[x_{i-1}; x_i]$. Jį vadinsime i-uoju sluoksniu. Sąlygoje duota, kad D yra leistinų lygiagrečiųjų pjūvių kūnas. Remiantis 2 savybe, visų i-ojo sluoksnio pjūvių projekcijos plokštumoje α bus pjūvio, kurio plotas lygus M_i, projekcijoje; visose i-ojo sluoksnio pjūvių projekcijose plokštumoje α bus pjūvio, kurio plotas lygus m_i, projekcija. Sudarykime cilindrus, kurių pagrindai yra didžiausio ir mažiausio ploto pjūviai, sudaromosios lygiagrečios ašiai Ox, o aukštinės lygios Δx_i (120 pav.). Tų cilindrų tūriai lygūs



120 pav.

$$M_i \Delta x_i \text{ ir } m_i \Delta x_i.$$

Minėtieji cilindrai yra i-ojo sluoksnio apibrėžtinis cilindras ir įbrėžtinis cilindras.

Taip padarę su visomis atkarpomis $[x_{i-1}; x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, gausime du laiptuotus kūnus D'' ir D'. Kūnas D'' yra sudarytas iš tų cilindrų, kuriuose yra duotojo kūno D dalijimo lygiagrečiomis plokštumomis sluoksniai. Todėl jis apima kūną D, t. y. D'' yra apibrėžtas apie D. Kūno D'' tūris lygus

$$V_{D''} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Kūnas D' sudarytas iš tų cilindrų, kurie yra atitinkamuose kūno D sluoksniuose, todėl jis yra duotajame kūne D, t. y. D' yra įbrėžtas į D. Kūno D' tūris yra

$$V_{D'} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Žinoma, kad tolydžiajai funkcijai $S(x)$, $x \in [a; b]$, teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} V_{D''} = \lim_{n\to\infty} V_{D'} = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Taigi, remiantis kūno tūrio apibrėžimu, kūnas D yra kubuojamas ir jo tūris apskaičiuojamas pagal formulę

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \blacksquare$$

Pastaba. Kadangi tolydžiai atkarpoje $[a; b]$ funkcijai $S(x)$ teisinga lygybė

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}; x_i],$$

tai anksčiau pateiktąjį kūno tūrio apibrėžimą galima pakeisti kitu:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i;$$

čia

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i$$

yra tūris laiptuoto kūno, gauto kiekvieną sluoksnį, atitinkantį atkarpą $[x_{i-1}; x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, pakeitus cilindru, kurio pagrindo plotas lygus $S(\xi_i)$ ir aukštinė lygi Δx_i.

Atkarpą $[a; b]$ padalijus į pakankamai smulkias dalis, t. y. kai n pakankamai didelis, laiptuotojo kūno tūris mažai skirsis nuo duotojo kūno tūrio. Todėl galima laikyti, kad sekos (V_n) riba bus lygi duotojo kūno tūriui. Taigi, remdamiesi pastaboje pateiktu kūno tūrio apibrėžimu, išaiškinome, kad (1) formulė tinka skaičiuoti tūriui kūno, kurio lygiagrečiųjų pjūvių plotai yra tolydžiosios funkcijos reikšmės. Pastebėsime, jog čia nebūtina reikalauti, kad būtų išpildyta 198 puslapyje pateikta 2 sąlyga.

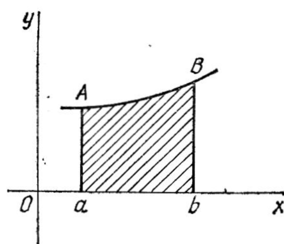
§ 39. SUKINIO TŪRIS

Nagrinėkime kreivinę trapeciją $aABb$, apribotą neneigiamos tolydžiosios funkcijos $f(x)$, $x \in [a; b]$, grafiku, ašies Ox atkarpa $[a; b]$ bei tiesių $x=a$ ir $x=b$ $(a<b)$ atkarpomis (121 pav.). Sukant ją apie abscisių ašį, gaunamas kūnas Φ (122 pav.). Lengva įsitikinti, kad sukinys Φ yra leistinų lygiagrečiųjų pjūvių kūnas. Ašiai Ox statmenas pjūvis, einantis per tašką, kurio abscisė x $(x \in [a; b])$, yra skritulys (arba taškas); jo plotas lygus

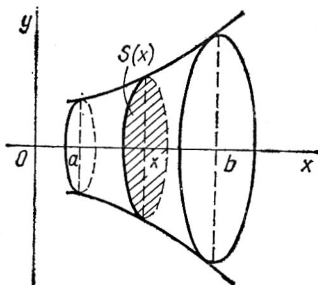
$$S(x) = \pi f^2(x). \qquad (1)$$

Žinoma (žr. § 38), kad leistinų lygiagrečiųjų pjūvių kūno tūris apskaičiuojamas pagal formulę

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \tag{2}$$



121 pav.



122 pav.

Į (2) formulę įrašę $S(x)$ reikšmę iš (1) lygybės, gauname

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{3}$$

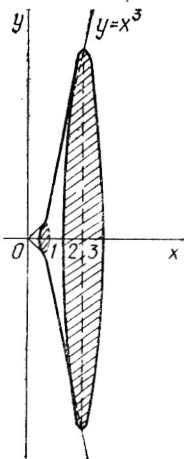
Taigi įrodėme, kad kreivinės trapecijos *sukinio tūris yra apskaičiuojamas pagal* (3) *formulę*.

1 uždavinys. Kreivinė trapecija, kurios kraštas aprašytas lygtimis $y=x^3$, $x=1$, $x=3$, $y=0$, sukama apie ašį Ox (123 pav.). Reikia rasti sukinio tūrį.

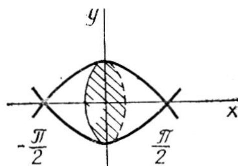
△ Remiantis (3) formule,

$$V=\pi\int_1^3 x^6\,dx=\frac{\pi}{7}\,[x^7]_1^3=$$

$$=\frac{\pi}{7}\,(3^7-1)=\frac{2186}{7}\,\pi. \ ▲$$



123 pav.



124 pav.

2 uždavinys. Kreivinė trapecija, apribota kosinusoidės pusbange $y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, ir abscisių ašimi, sukama apie abscisių ašį (124 pav.). Reikia rasti sukinio tūrį.

8. 87

△ Taikome (3) formulę:

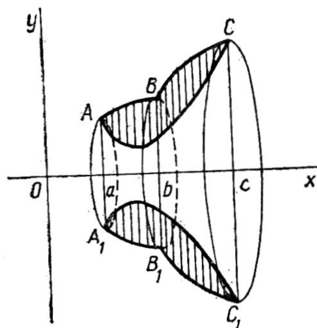
$$V=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 x dx=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{2}. \ \blacktriangle$$

Pastaba. Sakykime, reikia apskaičiuoti tūrį kūno, kuris gaunamas sukant apie abscisių ašį virš tos ašies esančią plokščiąją figūrą, kuri nėra kreivinė trapecija. Tas tūris yra kreivinių trapecijų sukinių tūrių algebrinė suma. Pavyzdžiui, 125 paveiksle pavaizduoto kūno tūris lygus

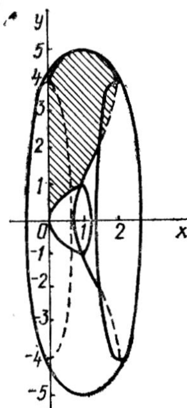
$$V=V_{AA_1B_1B}+V_{BB_1C_1C}-V_{AA_1C_1C}.$$

Tarkime, kad kreivės AB, BC ir AC yra funkcijų $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$; $y=\varphi(x)$, $x\in[b;\ c]$, ir $y=\psi(x)$, $x\in[a;\ c]$, grafikai.
Tada

$$V=\pi\left(\int_a^b f^2(x)\,dx+\int_b^c\varphi^2(x)\,dx-\int_a^c\psi^2(x)\,dx\right).$$



125 pav.



126 pav.

3 uždavinys. Reikia rasti tūrį kūno, gauto sukant apie abscisių ašį plokščiąją figūrą, kurios kraštas aprašytas lygtimis $y=\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=x^2$, $1\leqslant x\leqslant 2$, ir $y=-x^2+2x+4$, $0\leqslant x\leqslant 2$ (126 pav.).

△ Taikome (3) formulę:

$$V=\pi\left(-\int_0^1(\sqrt{x})^2\,dx-\int_1^2(x^2)^2\,dx+\int_0^2(-x^2+2x+4)^2\,dx\right)=$$

$$=\pi\left(-\int_0^1 x dx-\int_1^2 x^4\,dx+\int_0^2(x^4-4x^3-4x^2+16x+16)\,dx\right)=$$

$$=\pi\left(-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2+\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2-4\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2-4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+16\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2+16[x]_0^2\right)=$$

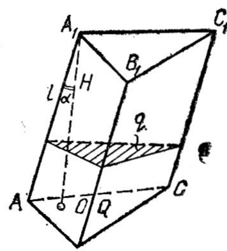
$$=\pi\left(-\frac{1}{2}-\frac{2^5}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2^5}{5}-2^4-\frac{4}{3}\cdot 2^3+8\cdot 2^2+16\cdot 2\right)=\frac{1111}{30}\pi. \ \blacktriangle$$

§ 40. PASVIROSIOS PRIZMĖS IR PASVIROJO CILINDRO TŪRIS

1 teorema (pasvirosios prizmės tūrio teorema). *Pasvirosios prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.*

□ Sakykime, duota pasviroji prizmė $ABCA_1B_1C_1$, kurios pagrindo plotas yra Q, o aukštinė H. Ašies Ox kryptimi pasirinkime duotosios prizmės pagrindo plokštumai statmeną kryptį. Tada duotoji prizmė yra kūnas, kurio lygiagrečiųjų pjūvių, statmenų ašiai Ox, plotai yra lygūs prizmės pagrindo plotui. Todėl galima taikyti 38 paragrafo (1) formulę:

$$V=\int_0^H Qdx=Q\int_0^H dx=QH. \blacksquare$$



127 pav.

Išvada. *Pasvirosios prizmės tūris lygus jos statmenojo pjūvio ploto ir šoninės briaunos ilgio sandaugai.*

□ Duota pasviroji prizmė $ABCA_1B_1C_1$ (127 pav.). Prizmės šoninės briaunos ilgį pažymėkime l, o statmenojo pjūvio plotą q. Jeigu prizmės aukštinė OA_1 su šonine briauna AA_1 sudaro kampą α, tai kampas tarp pagrindo plokštumos ir statmenojo pjūvio plokštumos irgi lygus α.

Iš $\triangle AA_1O$

$$H=l\cos\alpha. \qquad (1)$$

Duotosios prizmės statmenąjį pjūvį galime laikyti jos pagrindo statmenąja projekcija, todėl

$$q=Q\cos\alpha, \text{ t. y. } Q=\frac{q}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Kadangi pasvirosios prizmės tūris

$$V=H\cdot Q,$$

tai, įrašę į tą formulę (1) ir (2) lygybes, gauname

$$V=l\cos\alpha\cdot\frac{q}{\cos\alpha}=ql. \blacksquare$$

2 teorema. *Pasvirojo cilindro tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.*

Šios teoremos įrodymas analogiškas pasvirosios prizmės tūrio teoremos įrodymui.

§ 41. PIRAMIDĖS IR NUPJAUTINĖS PIRAMIDĖS TŪRIS

1 teorema (piramidės tūrio teorema). *Piramidės tūris lygus trečdaliui jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos.*

□ Duota piramidė, kurios aukštinė lygi H, o pagrindo plotas Q. Sakykime, α – plokštuma, kurioje yra piramidės pagrindas. Per piramidės vir-

šūnę išveskime plokštumą β, lygiagrečią plokštumai α (128 pav.). Ašį Ox pasirinkime statmeną plokštumai α. Koordinačių pradžios tašku laikykime plokštumos β ir ašies Ox susikirtimo tašką. Tada viršūnės taško abscisė bus lygi nuliui, o plokštumos α ir ašies Ox susikirtimo taško abscisė bus lygi piramidės aukštinei, t. y. H. Atstumą nuo piramidės viršūnės iki pagrindui lygiagrečios kertančiosios plokštumos γ pažymėkime x, o gautojo pjūvio plotą – $S(x)$. Žinoma (§ 25, 2 teorema), kad piramidės pagrindo ploto ir pagrindui lygiagretaus pjūvio ploto santykis yra lygus jų atstumų nuo viršūnės kvadratų santykiui. Todėl

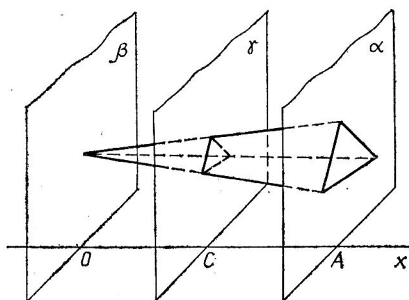
$$\frac{S(x)}{Q}=\frac{x^2}{H^2}, \text{ t. y. } S(x)=\frac{x^2}{H^2}Q.$$

Piramidės tūriui skaičiuoti taikome 38 paragrafo (1) formulę:

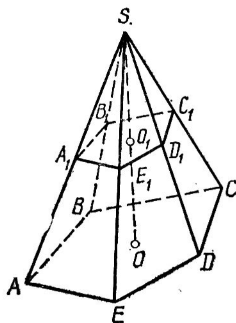
$$V=\int_0^H x^2\frac{Q}{H^2}\,dx=\frac{Q}{H^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H=\frac{1}{3}QH.$$

Taigi piramidės, kurios pagrindo plotas Q ir aukštinė H, tūris apskaičiuojamas pagal formulę

$$V=\frac{1}{3}QH. \blacksquare \tag{1}$$



128 pav.



129 pav.

2 teorema (nupjautinės piramidės tūrio teorema). *Nupjautinės piramidės, kurios pagrindų plotai q ir Q, o aukštinė H, tūris lygus trijų piramidžių, kurių aukštinės H, o pagrindų plotai q, Q ir* $\sqrt{qQ}$, *tūrių sumai:*

$$V=\frac{H}{3}(q+Q+\sqrt{qQ}).$$

□ Duotosios nupjautinės piramidės $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ tūris lygus piramidžių $SABCDE$ ir $SA_1B_1C_1D_1E_1$ (129 pav.) tūrių skirtumui. Todėl, pritaikę (1) formulę, gauname

$$V=\frac{1}{3}Q(H+h)-\frac{1}{3}qh; \tag{2}$$

čia h – aukštinė piramidės, kuri nupjautinę piramidę papildo iki pilnosios piramidės.

Remdamiesi piramidės lygiagrečiųjų pjūvių savybe, aukštinę h išreikšime dydžiais q, Q ir H:

$$\frac{q}{Q}=\frac{h^2}{(h+H)^2}; \text{ iš čia } h=\frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}.$$

h reikšmę įrašę į (2) formulę ir gautąjį reiškinį suprastinę, gausime

$$V=\frac{H}{3}(q+Q+\sqrt{qQ}). \blacksquare$$

§ 42. KŪGIO IR NUPJAUTINIO KŪGIO TŪRIS

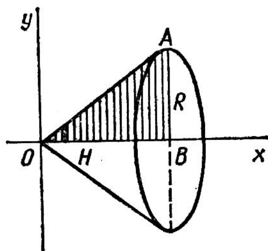
1 teorema (kūgio tūrio teorema). *Stataus apskritojo kūgio, kurio aukštinė lygi H ir pagrindo spindulys R, tūris lygus trečdaliui pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos:*

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H. \qquad (1)$$

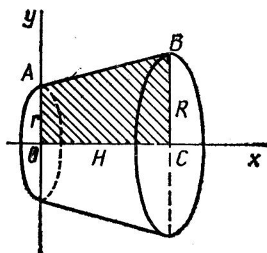
□ Duotąjį kūgį galime laikyti kūnu, gautu trikampį, kurio viršūnės yra $(0; 0)$, $(H; 0)$ ir $(H; R)$, sukant apie ašį Ox (130 pav.). Trikampis OAB yra kreivinės trapecijos atskiras atvejis. Tą trapeciją riboja abscisių ašis, funkcijos $y=\frac{R}{H}x$, $x\in[0; H]$, grafikas ir tiesės $x=H$ atkarpa. Todėl, remiantis 39 paragrafo (3) formule,

$$V=\pi\int_0^H\left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx=\pi\frac{R^2}{H^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Taigi kūgio tūris yra apskaičiuojamas pagal (1) formulę. ■



130 pav.



131 pav.

2 teorema (nupjautinio kūgio tūrio teorema). *Nupjautinio kūgio, kurio pagrindų spinduliai lygūs r ir R, o aukštinė H, tūris lygus trijų kūgių, kurių aukštinės H, o pagrindų spinduliai r, R ir $\sqrt{rR}$, tūrių sumai:*

$$V=\frac{\pi H}{3}(r^2+R^2+rR).$$

□ Nupjautinį kūgį galima gauti kreivinę trapeciją $OABC$ sukant apie ašį Ox (131 pav.). Tiesė AB eina per taškus $(0; r)$ ir $(H; R)$, todėl jos lygtis yra

$$\frac{y-r}{R-r}=\frac{x-0}{H-0}, \text{ t. y. } y=\frac{R-r}{H}x+r.$$

Pritaikę 39 paragrafo (3) formulę, randame nupjautinio kūgio tūrį:

$$V=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2 dx.$$

Norėdami apskaičiuoti integralą, pakeiskime kintamąjį. Sakykime,

$$u=\frac{R-r}{H}x+r. \qquad (2)$$

Tada

$$du=\frac{R-r}{H}dx, \text{ t. y. } dx=\frac{H}{R-r}du.$$

Rasime naujojo integralo integravimo rėžius. Į (2) formulę įrašę $x=0$, gauname apatinį integravimo rėžį $u=r$, o įrašę $x=H$, gauname viršutinį rėžį $u=R$.

Taigi

$$V=\pi\int_r^R u^2\frac{H}{R-r}du=\frac{\pi H}{R-r}\left[\frac{u^3}{3}\right]_r^R=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=$$

$$=\frac{\pi H}{3}(r^2+R^2+Rr);$$

$$V=\frac{\pi H}{3}(r^2+R^2+Rr).\ ■$$

§ 43. RUTULIO IR JO DALIŲ TŪRIS

1. Rutulio sluoksnio tūris. Stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje nagrinėkime kreivinę trapeciją $aABb$, apribotą apskritimo $x^2+y^2=$ $=R^2$, $-R\leqslant a\leqslant x\leqslant b\leqslant R$, lanku, ašies Ox atkarpa $[a; b]$ bei tiesių $x=a$ ir $x=b$ atkarpomis (132 pav.). Ją sukdami apie ašį Ox, gausime kūną, kuris vadinamas *rutulio sluoksniu*. Kadangi rutulio sluoksnis – sukinys, tai jo tūriui apskaičiuoti galima taikyti formulę

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx; \text{ čia } f^2(x)=y^2=R^2-x^2.$$

Vadinasi,

$$V=\pi\int_a^b (R^2-x^2)\,dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\pi\left(R^2(b-a)-\frac{b^3-a^3}{3}\right).$$

Taigi *rutulio, kurio spindulys R, sluoksnio, esančio tarp plokštumų $x=a$ ir $x=b$, tūris apskaičiuojamas pagal formulę*

$$V=\pi\left(R^2(b-a)-\frac{b^3-a^3}{3}\right). \qquad (1)$$

2. Rutulio tūris. Į (1) formulę įrašę $a=-R$ ir $b=R$, gauname rutulio, kurio spindulys R, tūrio formulę:

$$V=\pi\left(R^2\big(R-(-R)\big)-\frac{R^3-(-R)^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Taigi *rutulio, kurio spindulys R, tūris yra išreiškiamas formule*

$$V=\frac{4\pi}{3}R^3. \qquad (2)$$

3. Rutulio nuopjovos tūris. Jeigu į (1) formulę įrašysime $a=-R$ (arba $b=R$), tai gausime rutulio nuopjovos tūrio formulę. Pavyzdžiui, kai $b=R$,

$$V=\pi\left(R^2(R-a)-\frac{R^3-a^3}{3}\right)=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^2a+\frac{a^3}{3}\right).$$

Taigi *rutulio nuopjovos, kurią nuo spindulio R rutulio atkerta plokštuma $x=a$ $(-R<a<R)$, tūris apskaičiuojamas pagal formulę*

$$V=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^2a+\frac{a^3}{3}\right). \qquad (3)$$

Pastaba. Sakykime, rutulio sluoksnio pagrindų spinduliai yra r_1 ir r_2, o aukštinė H (132 pav.). Tada

$$H=b-a,\quad r_1^2=R^2-b^2 \text{ ir } r_2^2=R^2-a^2. \qquad (4)$$

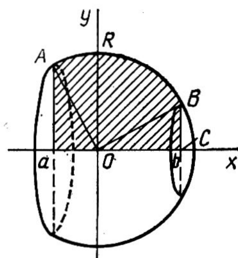
Iš $\triangle OBC$, remdamiesi Pitagoro teorema, turime $(H+a)^2+r_1^2=R^2$, t. y.

$$Ha=\frac{R^2-a^2-H^2-r_1^2}{2}=\frac{r_2^2-r_1^2-H^2}{2}. \qquad (5)$$

Pertvarkysime (1) formulę:

$$V=\frac{\pi(b-a)}{3}\big(3R^2-(b^2+ab+a^2)\big)=$$

$$=\frac{\pi(b-a)}{3}\big((R^2-b^2)+(R^2-a^2)+(R^2-ab)\big). \qquad (6)$$



132 pav.

Kadangi $ab=a(H+a)=aH+a^2$, tai, pritaikę (4) ir (5) lygybes, gauname

$$V=\frac{\pi H}{3}(r_1^2+r_2^2+(R^2-a^2)-aH)=\frac{\pi H}{3}\left(r_1^2+2r_2^2-\frac{r_2^2-r_1^2-H^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi H}{6}(3r_1^2+3r_2^2+H^2).$$

Taigi *rutulio sluoksnio, kurio pagrindų spinduliai lygūs r_1 ir r_2, o aukštinė lygi H, tūris yra išreiškiamas formule*

$$V=\frac{\pi H}{6}(3r_1^2+3r_2^2+H^2). \qquad (7)$$

Jeigu į (7) formulę įrašysime $r_1=0$ (arba $r_2=0$), tai gausime *rutulio nuopjovos, kurios pagrindo spindulys lygus r_2 (arba r_1), o aukštinė H, tūrio formulę*:

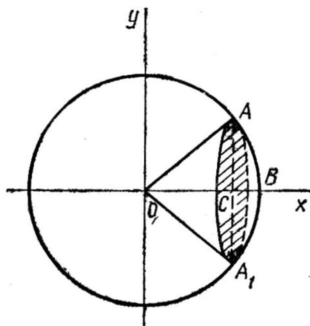
$$V=\frac{\pi H}{6}(3r_2^2+H^2) \qquad (8)$$

arba

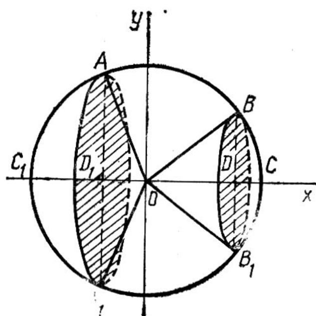
$$V=\frac{\pi H}{6}(3r_1^2+H^2). \qquad (9)$$

4. Rutulio išpjovos tūris. Sakykime, stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje duota skritulio išpjova OAB.

Jeigu ašis Ox sutampa su (OB), tai, sukdami išpjovą OAB apie ašį Ox, gausime kūną, kuris vadinamas *pirmojo tipo rutulio išpjova* (133 pav.).



133 pav.



134 pav.

1 teorema. *Pirmojo tipo rutulio išpjovos tūris išreiškiamas formule*

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H;$$

čia R — rutulio spindulys, H — rutulio nuopjovos ABA_1 aukštinė.

□ Lengva įsitikinti, kad pirmojo tipo rutulio išpjovą sudaro kūgis, gaunamas trikampį OAC sukant apie ašį Ox, ir rutulio nuopjova ABA_1. Pritaikę kūgio ir rutulio nuopjovos tūrio formules, gauname

$$V=\frac{1}{3}\pi|AC|^2\cdot|OC|+\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^2|OC|+\frac{|OC|^3}{3}\right). \qquad (10)$$

Kadangi $|CB|=H$ ir $|OB|=R$, tai $|OC|=R-H$. Iš $\triangle OAC$

$$|AC|^2=R^2-(R-H)^2=2RH-H^2.$$

Įrašę $|OC|$ ir $|AC|$ reikšmes į (10) formulę, gauname

$$V=\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)(R-H)+\pi\left(\frac{2}{3}R^3-R^2(R-H)+\frac{(R-H)^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^2 H. \blacksquare$$

Sakykime, ašis Ox kerta išpjovą OAB taške O. Sukdami išpjovą OAB apie ašį Ox, gausime kūną, kuris vadinamas *antrojo tipo rutulio išpjova* (134 pav.).

2 teorema. *Antrojo tipo rutulio išpjovos tūris išreiškiamas formule*

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H;$$

čia R — rutulio spindulys, H — rutulio juostos ABB_1A_1 aukštinė.

□ Antrojo tipo rutulio išpjova (žr. 134 pav.) yra rutulys be pirmojo tipo išpjovų $OBCB_1$ ir OA_1C_1A. Todėl

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^2 |DC| - \frac{2}{3}\pi R^2 |C_1D_1| =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^2 (2R - |DC| - |C_1D_1|) = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

nes

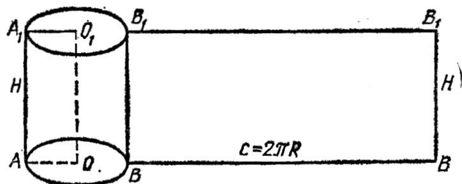
$$2R - |DC| - |C_1D_1| = H. \blacksquare$$

§ 44. RITINIO, KŪGIO IR NUPJAUTINIO KŪGIO PAVIRŠIAUS PLOTAS

1. Ritinio šoninio ir viso paviršiaus plotas. Cilindro šoninio paviršiaus plotu laikomas jo šoninio paviršiaus išklotinės (135 pav.) plotas. Todėl ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus plotui stačiakampio, kurio ilgis lygus ritinio pagrindo apskritimo ilgiui, o plotis — ritinio aukštinei. Jeigu prie ritinio šoninio paviršiaus ploto pridėsime abiejų jo pagrindų plotus, tai gausime ritinio viso paviršiaus plotą. Taigi ritinio šoninio paviršiaus plotas ir viso paviršiaus plotas yra išreiškiami formulėmis

$$S_{šon} = 2\pi RH, \quad S_{rit} =$$
$$= 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R);$$

čia R — ritinio pagrindo spindulys, H — ritinio aukštinė.



135 pav.

2. Kūgio šoninio ir viso paviršiaus plotas. Kūgio šoninio paviršiaus plotu laikomas jo šoninio paviršiaus išklotinės (136 pav.) plotas. Todėl stataus apskritojo kūgio šoninio paviršiaus plotas yra lygus atitinkamos skritulio išpjovos plotui ir išreiškiamas formule

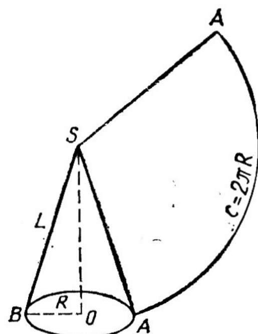
$$S_{šon} = \pi RL;$$

čia R — kūgio pagrindo spindulys, L — kūgio sudaromosios ilgis.

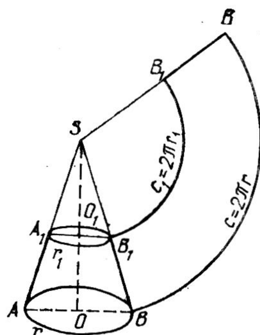
Jeigu prie kūgio šoninio paviršiaus ploto pridėsime kūgio pagrindo plotą, tai gausime kūgio viso paviršiaus plotą. Taigi stataus apskritojo kūgio viso paviršiaus plotas yra išreiškiamas formule

$$S_k = \pi RL + \pi R^2, \text{ t. y. } S_k = \pi R(R + L).$$

3. Nupjautinio kūgio šoninio ir viso paviršiaus plotas. Norint gauti nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus išklotinę, reikia jį perkirpti išilgai vienos sudaromosios (137 pav.).



136 pav.



137 pav.

Nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotu laikomas jo išklotinės plotas. Todėl nupjautinio kūgio, gauto iš stataus apskritojo kūgio, šoninio paviršiaus plotas yra išreiškiamas formule

$$S_{\text{šon}} = \pi (r_1 + r_2) L,$$

o viso paviršiaus plotas – formule

$$S_{\text{n. k}} = \pi (r_1 + r_2) L + \pi (r_1^2 + r_2^2);$$

čia L, r_1 ir r_2 – nupjautinio kūgio sudaromosios ilgis ir pagrindų spinduliai.

§ 45. SUKIMOSI PAVIRŠIAUS PLOTAS

Apibrėždami cilindro ir kūgio šoninio paviršiaus plotą, naudojomės jų išklotinėmis. Tačiau ne kiekvienam paviršiui toks būdas tinka. Pavyzdžiui, sferos negalima taip „išlenkti“, kad ji pasidarytų plokščia.

Pateiksime bendrą sukimosi paviršiaus ploto apibrėžimą ir gausime to ploto formulę.

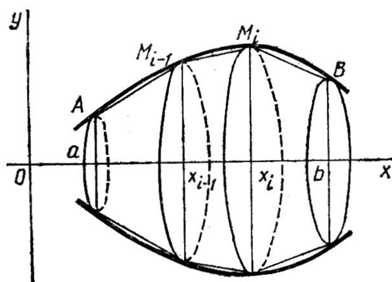
Sakykime, duotas kreivės lankas AB (138 pav.); kreivės lygtis $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, o $f(x)$ – neneigiama funkcija, tolydžiai diferencijuojama atkarpoje $[a; b]$.

Taškais

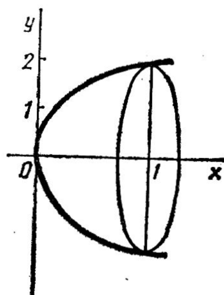
$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

padalykime atkarpą $[a; b]$ į n vienodo ilgio dalių. Per taškus x_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) išveskime tieses, lygiagrečias ašiai Oy. Tų tiesių ir kreivės AB susikirtimo taškus pažymėkime M_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). Į lanką AB įbrėžkime laužtę $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$. Lanką AB ir laužtę $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ sukime apie

ašį Ox. Gausime du sukimosi paviršius, kurių vienas bus sudarytas iš n nupjautinių kūgių (kai kurie gali būti kūgiai arba ritiniai) šoninių paviršių. To paviršiaus plotą jau mokame apskaičiuoti. Atkarpą $[a; b]$ padalijus į



138 pav.



139 pav.

pakankamai smulkias dalis, t. y. kai n pakankamai didelis, paviršiai, gauti sukant lanką AB ir į jį įbrėžtą laužtę, vis mažiau skirsis vienas nuo kito. Todėl ir pateiksime šitokį apibrėžimą.

Lanko AB sukimosi apie ašį *paviršiaus plotu* vadinama riba, prie kurios artėja į lanką AB įbrėžtos laužtės $AM_1M_2...M_{n-1}B$ sukimosi apie tą ašį paviršiaus plotas, kai laužtės grandžių skaičius neribotai didėja ($n \to \infty$) ir kiekvienos grandies ilgis neribotai mažėja.

Galima įrodyti, kad lanko AB sukimosi apie ašį Ox paviršiaus plotas egzistuoja ir yra išreiškiamas formule

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx; \qquad (1)$$

trumpiau

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Šios formulės neišvesime.

1 uždavinys. Parabolė $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, (139 pav.) sukama apie ašį Ox. Reikia rasti gautojo paviršiaus plotą.

△ Taikysime (1) formulę. Kadangi $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, tai gautojo sukimosi paviršiaus plotas bus

$$S = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx =$$

$$= 4\pi \left(1 + x\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1). \ ▲$$

Jeigu kreivė AB aprašyta parametrinėmis lygtimis $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ ($\varphi(t)$ ir $\psi(t)$ — tolydžiai diferencijuojamos funkcijos atkarpoje $[\alpha;\beta]$), tai (1) formulė virsta šitokia:

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (2)$$

2 uždavinys. Cikloidės $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, arka sukama apie ašį Ox. Reikia apskaičiuoti gautojo paviršiaus plotą.

△ Taikykime (2) formulę. Kadangi $x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'=a\sin t$, tai

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

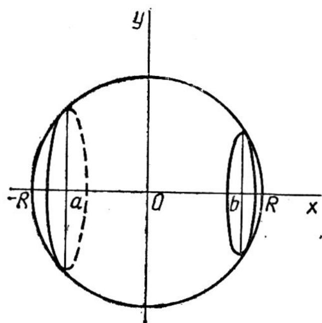
$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{2\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{64\pi a^2}{3}. \ ▲$$

§ 46. SFEROS IR JOS DALIŲ PLOTAS

1. Rutulio juostos paviršiaus plotas. Nagrinėkime spindulio R apskritimą, kurio centras yra koordinačių pradžia. To apskritimo lanką $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\leqslant a\leqslant x\leqslant b\leqslant R$, sukdami apie ašį Ox, gausime *rutulio juostos paviršių* (140 pav.).



140 pav.

Rutulio juostos paviršiaus plotui apskaičiuoti taikykime 45 paragrafo (1) formulę. Gausime

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=$$

$$=2\pi\int_a^b R\,dx=2\pi R(b-a). \qquad (1)$$

Jeigu rutulio juostos aukštinė lygi H, tai $b-a=H$. Tada $S=2\pi RH$.

2. Rutulio nuopjovos paviršiaus plotas. Kai (1) formulėje $a=-R$, o $H=b+R$, gauname rutulio nuopjovos paviršiaus ploto formulę

$$S=2\pi RH; \tag{2}$$

čia H – rutulio nuopjovos aukštinė.

3. Sferos plotas. (1) formulėje paėmę $a=-R$, $b=R$, taigi $b-a=2R$, gauname sferos ploto formulę:

$$S=4\pi R^2. \tag{3}$$

IV SKYRIAUS UŽDAVINIAI

1. Briaunainių Φ_1 ir Φ_2 tūriai lygūs V_1 ir V_2. Raskite figūros $\Phi_1 \cup \Phi_2$ tūrį, kai figūros $\Phi_1 \cap \Phi_2$ tūris lygus $0{,}5V_2$ (arba $0{,}1V_1$).

2. Briaunainių Φ_1 ir Φ_2 tūriai lygūs V_1 ir V_2. Kokiu atveju figūros $\Phi_1 \cup \Phi_2$ tūris bus lygus V_1 (arba V_2)?

3. Vienetinis kubas yra perkirstas plokštuma, einančia per jo simetrijos ašį. Raskite kiekvienos kubo dalies tūrį.

4. Stačiakampis gretasienis, kurio tūris lygus V, perkirstas plokštuma, einančia per jo simetrijos ašį. Raskite gretasienio dalių tūrius.

5. Kubas, kurio tūris lygus V, yra perkirstas plokštuma, einančia per jo simetrijos centrą. Raskite kubo dalių tūrius.

6. Kubo įstrižainė lygi l. Raskite kubo tūrį.

7. Stačiakampio gretasienio pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi a. Jo įstrižainė lygi $l\,(l>\sqrt{2}a)$. Raskite gretasienio tūrį.

8. Stačiakampio gretasienio sienų plotai lygūs Q_1, Q_2 ir Q_3. Įrodykite, kad jo tūris lygus $\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$.

9. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės lygios 7 cm ir $\sqrt{18}$ cm, o kampas tarp jų lygus 45°. Trumpesnioji gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Raskite gretasienio tūrį.

10. Stačiakampio gretasienio įstrižainė su šoninės sienos plokštuma sudaro 30° kampą, o su šonine briauna – 45° kampą. Jos ilgis lygus 12 cm. Raskite gretasienio tūrį.

11. Stačiakampio gretasienio įstrižainė su vienos sienos plokštuma sudaro 30° kampą, o su kitos sienos plokštuma – 45° kampą. Jos ilgis lygus l. Raskite gretasienio tūrį.

12. Stačiakampio gretasienio įstrižainė su pagrindu sudaro 60° kampą; dvisienio kampo tarp įstrižojo pjūvio ir šoninės sienos didumas lygus 45°; pagrindo įstrižainė lygi d. Raskite gretasienio tūrį.

13. Stačiojo gretasienio briaunos, išeinančios iš vienos viršūnės, lygios 1 m, 2 m, 3 m; be to, kampas tarp dviejų trumpesniųjų briaunų lygus 60°. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

14. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės lygios 10 cm ir 17 cm. Viena pagrindo įstrižainė lygi 21 cm, o ilgesnioji gretasienio įstrižainė lygi 29 cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

15. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi 13 cm, o jo šoninių sienų įstrižainės lygios $4\sqrt{10}$ cm ir $3\sqrt{17}$ cm. Raskite gretasienio tūrį.

16. Stačiojo gretasienio pagrindas yra lygiagretainis, kurio kampas lygus 120°, o kraštinės lygios 3 cm ir 4 cm. Trumpesnioji gretasienio įstrižainė lygi ilgesniajai pagrindo įstrižainei. Raskite gretasienio tūrį.

17. Pasvirojo gretasienio šoninės briaunos projekcija pagrindo plokštumoje lygi 5 cm, o aukštinė – 12 cm. Šoninei briaunai statmenas pjūvis yra rombas, kurio plotas 24 cm², o įstrižainė lygi 8 cm. Raskite gretasienio tūrį.

18. Pasvirojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio kraštinė a ir kampas 30°. Vienos šoninės sienos įstrižainė statmena pagrindo plokštumai, o šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Raskite gretasienio tūrį.

19. Iš stačiakampio gretasienio formos varinio luito, kurio matmenys 80cm × 20cm × × 5cm, valcuojamas 1 mm storio lakštas. Raskite to lakšto plotą.

20. Iš kvadratinio skardos lakšto, kurio kraštinė *a*, pagamintas didžiausios talpos atviras bakas; jo pagrindas – kvadratas. Raskite bako matmenis.

21. Stačiosios prizmės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio kraštinės lygios 5 cm ir 6 cm. Prizmės aukštinė lygi ilgesniajai to trikampio aukštinei. Raskite prizmės tūrį.

22. Stačiosios prizmės pagrindas yra trikampis, kurio kraštinės lygios 7,5 cm, 6,5 cm ir 7 cm, o prizmės šoninė briauna lygi $1\frac{2}{7}$ cm. Apskaičiuokite lygiatūrio su duotąja prizme kubo briauną.

23. Stačiosios trikampės prizmės aukštinė lygi 6 m, jos tūris lygus 2880 m^3. Šoninių sienų plotų santykis 17 : 17 : 16. Raskite pagrindo kraštinių ilgius.

24. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainės ilgis lygus 3,5 m, o šoninės sienos įstrižainės ilgis – 2,5 m. Raskite prizmės tūrį.

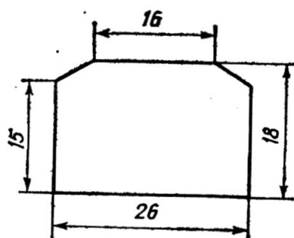
25. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė, kurios ilgis *a*, su šonine siena sudaro 30° kampą. Raskite prizmės tūrį.

26. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinė lygi *a*. Šoninės sienos įstrižainės su kita šonine siena sudaro kampą α. Raskite prizmės tūrį.

27. Stačiosios prizmės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio kraštinės lygios 5 cm ir 6 cm; mažesniosios šoninės sienos įstrižainė su didesniąja šonine siena sudaro 45° kampą. Raskite prizmės tūrį.

28. Stačiosios prizmės pagrindas yra trikampis, kurio kraštinės lygios 3 cm ir 5 cm, o kampas tarp jų lygus 120°. Didžiausias iš šoninių sienų plotų lygus 35 cm^2. Raskite prizmės tūrį.

29. Stačiosios prizmės pagrindas yra statusis trikampis, kurio plotas *S*, o smailusis kampas α. Didžiausias iš šoninių sienų plotų lygus *Q*. Raskite prizmės tūrį.



141 pav.

30. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninė briauna lygi pagrindo aukštinei, o pjūvio, einančio per šoninę briauną ir pagrindo aukštinę, plotas lygus *Q*. Raskite prizmės tūrį.

31. Geležinkelio pabėgio ilgis lygus 2,7 m, o jo skersinis pjūvis pavaizduotas 141 paveiksle (matmenys pateikti centimetrais). Kiek pabėgių galima pakrauti į 17 t keliamosios galios geležinkelio platformą? (Laikykite medžio tankį lygiu 0,8 g/cm^3.)

32. Taisyklingosios keturkampės prizmės formos vandens baseino tūris lygus 32 m^3. Baseino dugną ir sienas reikia iškloti plytelėmis. Kokie turėtų būti baseino matmenys, kad jo apdailai išeitų mažiausiai plytelių? Kiek reikėtų plytelių, kurių matmenys 20 cm × 20 cm?

33. Plokštuma, lygiagreti lygiašonio ritinio ašiai, nuo jo pagrindo atkerta 120° lanką. Pjūvio perimetras lygus $(8+4\sqrt{3})$ cm. Apskaičiuokite ritinio tūrį.

34. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą; jos ilgis $d=16$ cm. Raskite ritinio tūrį.

35. Stačiakampį, kurio plotas lygus *S*, apsukus apie vieną jo kraštinių, gautas ritinys. Stačiakampio įstrižainių susikirtimo taško apibrėžto apskritimo ilgis lygus *C*. Raskite ritinio tūrį.

36. Ritinio sudaromajai statmeno ritinio pjūvio plotas lygus *M*, o ašinio pjūvio plotas lygus *N*. Raskite ritinio tūrį.

37. Ritinio ašiai lygiagretus ritinio pjūvis nuo ritinio ašies yra nutolęs atstumu *d*, o nuo pagrindo apskritimo atkerta lanką, kurio didumas α. Pjūvio plotas lygus *S*. Raskite ritinio tūrį.

38. Plieninio veleno skersmuo 8,4 cm, ilgis 97 cm. Nutekinus veleną, jo skersmuo sumažėjo 0,2 cm. Kiek sumažėjo veleno masė? (Plieno tankis 7,4 g/cm^3.)

39. Metro statyboje naudojami gelžbetoniniai žiedai, kurių išorinis spindulys 5,5 m, o vidinis spindulys 5,1 m. Koks 100 m ilgio žiedo tūris? Kiek nuošimčių sumažėtų jo tūris, abiejų spindulių ilgius sumažinus po 0,4 m?

40. Apskaičiuokite tūrius kūnų, gautų sukant apie ašį Ox plokščiąsias figūras, apribotas šiomis kreivėmis:

a) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=-x+\frac{3}{2}$; b) $y=x^2$, $x=0$, $y=1$;

c) $y^2=(x-1)^3$, $x=2$; d) $y^2=x$, $x^2=y$;

e) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$; f) $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$;

g) $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$; h) $x^2-y^2=1$, $x=a+1$ $(a>0)$.

41. Pasvirosios prizmės pagrindo kraštinės lygios 4 cm, 13 cm ir 15 cm. Šoninė briauna, lygi $10\sqrt{2}$ cm, pasvirusi į pagrindo plokštumą 45° kampu. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

42. Pasvirosios prizmės pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinės lygios 6 dm ir 12 dm, o kampas 60°. Prizmės šoninė briauna, lygi 14 dm, su pagrindo plokštuma sudaro 30° kampą. Raskite prizmės tūrį.

43. Pasvirosios trikampės prizmės šoninės briaunos lygios 15 cm, o atstumai tarp jų 17 cm, 25 cm ir 26 cm. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

44. Pasvirojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio smailusis kampas lygus α. Kiekviena gretasienio briauna lygi a. Šoninė briauna, einanti per rombo smailiojo kampo viršūnę, su pagrindo kraštinėmis sudaro kampus, lygius α. Raskite gretasienio tūrį.

45. Pasvirosios prizmės pagrindas yra lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi a. Viena prizmės šoninė siena statmena pagrindo plokštumai ir yra rombas, kurio įstrižainė lygi b. Raskite prizmės tūrį.

46. Prizmės pagrindas yra lygiašonė trapecija, kurios pagrindai lygūs 28 cm ir 44 cm, o šoninės kraštinės lygios 17 cm. Vienas prizmės įstrižasis pjūvis statmenas pagrindui ir yra rombas, kurio kampas 45°. Raskite prizmės tūrį.

47. Visos gretasienio sienos — rombai, kurių įstrižainės 6 cm ir 8 cm. Raskite gretasienio tūrį.

48. Pasvirojo gretasienio pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės a ir b, o šoninė briauna, lygi c, su gretimomis pagrindo kraštinėmis sudaro kampus, lygius α. Raskite gretasienio tūrį.

49. Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės 6 cm ir 8 cm, o kiekviena šoninė briauna lygi 13 cm. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

50. Taisyklingosios šešiakampės piramidės aukštinė lygi 1 m, o jos apotema su aukštine sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

51. Trikampės piramidės šoninės briaunos poromis statmenos ir lygios a, b ir c. Įrodykite, kad jos tūris lygus $\frac{abc}{6}$.

52. Taisyklingosios keturkampės piramidės viso paviršiaus plotas lygus 108 cm². Dvisienio kampo prie pagrindo didumas lygus 60°. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

53. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite piramidės tūrį.

54. Piramidės pagrindas — rombas, kurio kraštinė a ir smailusis kampas α. Visi dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs φ. Raskite piramidės tūrį.

55. Piramidės pagrindas — rombas, kurio kraštinė a ir smailusis kampas α; piramidės aukštinė h. Raskite piramidės tūrį.

56. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio aukštinė lygi h, o kampas prie viršūnės α. Piramidės aukštinė lygi H. Raskite piramidės tūrį.

57. Taisyklingojo tetraedro paviršiaus plotas lygus S. Raskite jo tūrį.

58. Cheopso piramidė yra taisyklingosios keturkampės piramidės formos. Jos aukštis ≈ 150 m, o šoninė briauna ≈ 220 m. Raskite piramidės tūrį.

59. Vieno Jakutijoje iškastų deimantų masė — 42 karatai, jo forma — taisyklingasis oktaedras. Raskite to oktaedro briauną. (Deimanto tankis 3,5 g/cm³, 1 karatas= =0,2 g.)

60. Trikampės piramidės sienos poromis statmenos, o jų plotai lygūs a^2, b^2 ir c^2. Raskite piramidės tūrį.

61. Trikampės nupjautinės piramidės aukštinė lygi 10 m, apatinio pagrindo kraštinės lygios 27 m, 29 m ir 52 m, o viršutinio pagrindo perimetras lygus 72 m. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

62. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės pagrindų kraštinės lygios 40 cm ir 10 cm. Piramidės viso paviršiaus plotas lygus 3400 cm^2. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės tūrį.

63. Per piramidės aukštinės vidurio tašką išvesta pagrindui lygiagreti plokštuma. Piramidės aukštinė lygi 18 cm, o pagrindo plotas 400 cm^2. Raskite gautos nupjautinės piramidės tūrį.

64. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės yra a ir $b\,(a>b)$, dvisienis kampas prie didesniojo pagrindo lygus α. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

65. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės yra a ir b $(a>b)$, šoninės sienos smailusis kampas lygus α. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

66. Kūgio sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą ir yra lygi $\sqrt{6}$ cm. Raskite kūgio tūrį.

67. Kūgio ašinis pjūvis — taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė 6 cm. Raskite kūgio tūrį.

68. Kūgio pagrindo skersmuo lygus 6 cm, o kampas tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus 30°. Raskite kūgio tūrį.

69. Kūgio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus 90°, pjūvio plotas 18 cm^2. Raskite kūgio tūrį.

70. Per kūgio viršūnę išvesta plokštuma, sudaranti su pagrindu kampą φ ir atkertanti nuo pagrindo apskritimo lanką α; atstumas nuo pjūvio plokštumos iki pagrindo centro lygus d. Raskite kūgio tūrį.

71. Statusis trikampis, kurio statiniai 8 cm ir 15 cm, sukamas apie ilgesnįjį statinį. Apskaičiuokite gautojo sukinio tūrį.

72. Kūgio pagrindo spindulys $R=3$ cm. Per kūgio viršūnę išvesta plokštuma, sudaranti su pagrindu 45° kampą ir atkertanti ketvirtadalį pagrindo apskritimo. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

73. Trikampis, kurio kraštinės lygios 10 dm, 17 dm ir 22 dm, sukamas apie ilgiausiąją kraštinę. Raskite gautojo sukinio tūrį.

74. Statusis trikampis, kurio plotas S ir smailusis kampas α, sukamas apie ašį, kurioje yra įžambinė. Raskite sukinio tūrį.

75. Lygiašonis trikampis, kurio pagrindas a ir kampas prie pagrindo lygus α, sukamas apie ašį, kurioje yra pagrindas. Raskite sukinio tūrį.

76. Statusis trikampis, kurio plotas S ir smailusis kampas α, sukamas apie ašį, einančią per stataus kampo viršūnę ir lygiagrečią įžambinei. Raskite sukinio tūrį.

77. Lygiašonis trikampis, kurio kampas prie viršūnės lygus β, o šoninė kraštinė lygi m, sukamas apie šoninę kraštinę apimančią ašį. Raskite sukinio tūrį.

78. Kūgiškos grūdų krūvos aukštis 2,4 m, o pagrindo apskritimo ilgis 20 m. 1 m^3 grūdų masė lygi 750 kg. Kiek tonų grūdų yra krūvoje?

79. Skalda pilama į kūgišką krūvą, kurios šlaitas pasviręs 33° kampu. Kokio aukščio turi būti krūva, kad jos tūris būtų lygus 10 m^3?

80. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs 1 dm ir 9 dm, sudaromoji lygi 1 m. Raskite nupjautinio kūgio tūrį.

81. Nupjautinio kūgio pagrindų spindulių ir aukštinės santykis yra 3 : 6 : 4, o sudaromoji lygi 25 cm. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio tūrį.

82. Lygiašonė trapecija, kurios kampas lygus 60°, sukama apie ašį, einančią per jos šoninę kraštinę. Trapecijos pagrindai lygūs 6 cm ir 20 cm. Apskaičiuokite sukinio tūrį.

83. Rombas, kurio kraštinė a, o smailusis kampas α, sukamas apie ašį, einančią per smailiojo kampo viršūnę ir statmeną jo kraštinei. Raskite sukinio tūrį.

84. Rombas, kurio ilgesnioji įstrižainė d, o smailusis kampas α, sukamas apie tiesę, lygiagrečią rombo kraštinei ir nutolusią nuo įstrižainių susikirtimo taško atstumu d. Raskite sukinio tūrį.

85. Rąsto ilgis 15,5 m, jo galų skersmenys 42 cm ir 35 cm. Raskite santykinę paklaidą, kurią darome, laikydami rąsto tūrį lygiu jo vidurinio skerspjūvio ploto ir ilgio sandaugai.

86. Rutulio spindulys lygus 1 dm, o taisyklingosios trikampės prizmės kiekviena briauna lygi 2 dm. Kurio kūno tūris didesnis?

87. Rutulio modelio skersmuo 12 cm, kubo modelio briauna 1 dm. Abu modeliai pagaminti iš tokios pat medžiagos. Kurio modelio masė mažesnė?

88. Spindulys OM dalija pusskritulį, kurio skersmuo AB, į dvi išpjovas; $\smile AM = 120°$. Tos išpjovos sukamos apie (AB). Raskite gautųjų sukinių tūrių santykį.

89. Rutulys perkirstas plokštuma, statmena skersmeniui ir dalijančia jį santykiu 1 : 2. Raskite rutulio dalių tūrių santykį.

90. Rutulys perkirstas plokštuma, statmena spinduliui ir dalijančia spindulį pusiau. Raskite rutulio dalių tūrių santykį.

91. Rutulio spindulys 65 cm, jo nuopjovos pagrindo spindulys 56 cm. Apskaičiuokite rutulio nuopjovos tūrį.

92. Išpjova AOB, kurios $\widehat{AOB} = 30°$ ir spindulys R, sukama apie tiesę ON, statmeną tiesei OB. Raskite gautojo sukinio tūrį.

93. Rutulio išpjovos ašinio pjūvio kampas lygus α, rutulio spindulys R. Raskite išpjovos tūrį.

94. Rutulyje išilgai skersmens išgręžta cilindrinė kiaurymė. Rutulio spindulys lygus 2 dm, kiaurymės spindulys lygus 1 dm. Raskite likusios rutulio dalies tūrį.

95. Rutulio išpjovos ašinio pjūvio lankas lygus 120°. Raskite jos tūrio ir atitinkamos rutulio nuopjovos tūrio santykį.

96. Apie kubą, kurio briauna lygi 1 m, apibrėžtas rutulys. Raskite jo tūrį.

97. Taisyklingojo tetraedro pagrindo kraštinė lygi a, dvisienis kampas prie pagrindo lygus φ. Raskite įbrėžto į tetraedrą rutulio tūrį.

98. Rutulio tūris lygus V. Į rutulį įbrėžta stačioji trikampė prizmė. Prizmės pagrindas yra statusis trikampis, kurio smailusis kampas lygus α, o didžiausioji šoninė siena yra kvadratas. Raskite prizmės tūrį.

99. Į spindulio R rutulį įbrėžtas kūgis, kurio sudaromoji su aukštine sudaro kampą α. Raskite kūgio tūrį.

100. Į spindulio R rutulį įbrėžta keturkampė piramidė, kurios šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą kampu φ. Prizmės pagrindas yra stačiakampis, kurio įstrižainė su ilgesniąja kraštine sudaro kampą α. Raskite piramidės tūrį.

101. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo briauna lygi a, plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite į ją įbrėžto rutulio tūrį.

102. Į kūgį įbrėžtas rutulys, kurio didžiojo skritulio plotas lygus S. Kampas tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios lygus α. Raskite kūgio tūrį.

103. Į ritinį įbrėžta keturkampė prizmė, kurios dvi šoninės briaunos yra ritinio ašiniame pjūvyje, o kitos dvi — tam pjūviui statmenoje plokštumoje. Dvisienis kampas prie vienos iš briaunų lygus α. Prizmės aukštinė lygi jos pagrindo perimetrui, o pagrindo įstrižainių suma lygi s. Raskite prizmės tūrį.

104. Apie kūgį apibrėžta piramidė. Piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio smailusis kampas lygus α. Kūgio pagrindo spindulys lygus r, sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu β. Raskite kūgio tūrį.

105. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė su šonine briauna sudaro kampą α ir yra lygi a. Raskite į tą piramidę įbrėžto kūgio tūrį.

106. Taisyklingosios keturkampės prizmės formos vandens baseino tūris turi būti lygus 32 m^3. Baseino dugną ir sienas reikia iškloti plytelėmis. Kokie turėtų būti baseino matmenys, kad jo apdailai išeitų mažiausiai plytelių?

107. Naftos fontano čiurkšlės skersmuo prie pagrindo lygus 20 cm. Nafta trykšta 23 m/s greičiu. Kiek kubinių metrų naftos ištrykšta per valandą? Kiek 50 m^3 talpos cisternų galima pripildyti ta nafta?

108. 15,5 m ilgio pušies kamieno galų skersmenys $d_1 = 42$ cm ir $d_2 = 25$ cm. Raskite santykinę paklaidą, kurią darome, laikydami pušies tūrį lygiu jos vidurinio skerspjūvio ploto ir ilgio sandaugai.

109. Rutulinio dujų priimtuvo skersmuo 9,22 m. 1) Kokia jo talpa? 2) Į priimtuvą pripumpuota 2500 m^3 normalaus slėgio dujų. Iki kiek atmosferų suspaustos dujos priimtuve?

110. Abipus išgaubto lęšio paviršių spindulys lygus 10 cm, lęšio storis 4,0 cm. Raskite lęšio tūrį.

111. J. Gagarinui skriejant kosminiu laivu „Vostok-1", didžiausias nuotolis nuo Žemės buvo 302 km, mažiausias – 175 km. Kiek nuošimčių Žemės paviršiaus jis matė kiekvienoje iš tų padėčių? ($r \approx 6370$ km.)

112. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus Q. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

113. Ritinio šoninio paviršiaus išklotinės įstrižainė su ritinio pagrindo apskritimą atitinkančia išklotinės kraštine sudaro kampą α ir yra lygi l. Raskite ritinio viso paviršiaus plotą.

114. Styga, kurios ilgis lygus a, jungia ritinio pagrindo lanko φ galus. Ritinio aukštinė lygi H. Raskite ritinio viso paviršiaus plotą.

115. Atkarpa, jungianti ritinio viršutinio ir apatinio pagrindo diametraliai priešingus taškus, pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu, o jos ilgis lygus 10 cm. Raskite ritinio šoninio ir viso paviršiaus plotą.

116. Kiek kvadratinių metrų skardos sunaudota 1 mln. 10 cm skersmens ir 5 cm aukščio konservų dėžučių pagaminti (siūlėms ir atliekoms pridėkite 10%)?

117. Dvi trikampio viršūnės yra ritinio apatinio pagrindo skersmens galai, o trečioji – jam statmeno viršutinio pagrindo skersmens galas. Tas trikampis yra lygiakraštis, o jo kraštinė lygi a. Raskite ritinio šoninio ir viso paviršiaus plotą.

118. Per ritinio sudaromąją išvesta plokštuma, kuri su ritinio ašinio pjūvio, einančio per tą sudaromąją, plokštuma sudaro kampą α. Pjūvyje gauto stačiakampio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą β ir yra lygi d. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

119. Ritinio aukštinė lygi h, ašinio pjūvio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

120. Stačiakampio kraštinė lygi h, kampas tarp jo įstrižainių lygus φ. Stačiakampis sukamas apie ašį, einančią per duotąją kraštinę. Raskite gautojo ritinio šoninio paviršiaus plotą.

121. Kvadratas, kurio kraštinė lygi a, sukamas apie ašį, lygiagrečią jo kraštinei ir nutolusią nuo artimiausios kraštinės per jos ilgį. Raskite gautojo sukinio paviršiaus plotą.

122. Kūgio sudaromoji lygi l, ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus φ. Raskite kūgio šoninio ir viso paviršiaus plotą.

123. Kūgio pagrindo plotas lygus Q, sudaromoji lygi l. Raskite kūgio šoninio ir viso paviršiaus plotą.

124. Siloso bokšto kūgiško stogo skersmuo 6 m, aukštis 2 m. Stogas dengiamas skardos lapais, kurių matmenys 0,7 m × 1,4 m. Siūlės ir atraižos sudaro 10% stogo ploto. Kiek skardos lapų reikia tam stogui uždengti?

125. Statusis trikampis, kurio statinis lygus a ir prieš jį esantis kampas lygus 30°, sukamas apie įžambinę. Raskite gautojo sukinio paviršiaus plotą.

126. Lygiašonis trikampis, kurio pagrindo ilgis b, o kampas prie viršūnės φ, sukamas apie pagrindą. Raskite gautojo sukinio paviršiaus plotą.

127. Kūgio ašinio pjūvio plotas 4 kartus mažesnis už pagrindo plotą. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos.

128. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės lygios a, kampas tarp jų lygus α. Trikampis sukamas apie ašį, einančią per pagrindo galą ir statmeną pagrindui. Raskite gauto sukinio paviršiaus plotą.

129. Lygiagretainio kraštinės lygios a ir b, o kampas tarp jų lygus α. Lygiagretainis sukamas apie kraštinę b. Raskite gautojo sukinio paviršiaus plotą.

130. Kibiras yra nupjautinio kūgio formos. Jo pagrindų skersmenys 28 cm ir 20 cm, o aukštis 24 cm. Kokie jo šoninio paviršiaus išklotinės matmenys? Kiek medžiagos reikia tokiam kibirui pagaminti (neatsižvelgiant į sąnaudas siūlėms)?

131. Didžiausias kampas tarp kūgio sudaromųjų lygus 120°. Ritinys ir kūgis turi bendrą pagrindą ir aukštinę. Įrodykite, kad jų šoninių paviršių plotai yra lygūs.

132. Raskite plotą tos Žemės paviršiaus dalies, kurią mato kosmonautas, išėjęs iš kosminio laivo 300 km aukštyje nuo Žemės paviršiaus. Laikykite Žemės rutulio spindulį lygiu 6400 km.

133. Rutulio juostos pagrindai kongruentūs, o juostos paviršiaus plotas lygus pagrindų plotų sumai. Raskite ašinio pjūvio lanko kampinį didumą (laipsniais).

134. Žemės sausumos plotas sudaro 29% Žemės viso paviršiaus ploto. Kiek kartų Žemės sausumos plotas didesnis už Mėnulio paviršiaus plotą?

135. Į nupjautinį kūgį įbrėžtas rutulys, kurio paviršiaus plotas lygus S. Kūgio sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą.

136. Į spindulio R rutulį įbrėžtas kūgis, kurio sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite kūgio viso paviršiaus plotą.

137. Apskaičiuokite plotus paviršių, gautų sukant apie ašį Ox šias kreives:

a) $y=x^3,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; b) $y^2=2px,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{p}{2}$;

c) $y=x\sqrt{\frac{x}{a}},\ 0\leqslant x\leqslant a$; d) $y=\sin x,\ 0\leqslant x<\pi$;

e) $x^2+(y-b)^2=a^2\ (b\geqslant a)$; f) $y=\sin 2x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

g) $x=a\cos 3t,\ y=a\sin 3t$; h) $x=t^2,\ y=\frac{t}{3}\,(t^2-3)$;

i) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t$.

ATSAKYMAI

I DALIS I SKYRIUS

1. a) $\mathbf{0}$; b) $\mathbf{0}$; c) $\mathbf{0}$; d) $2\mathbf{b}$ arba $2\mathbf{d}$; e) $\mathbf{0}$; f) $\mathbf{b}+\mathbf{d}$ arba $-\mathbf{a}-\mathbf{b}$; g) $\mathbf{d}$ arba $\mathbf{a}$. **2.** 10 N. **4.** 2 N. **5.** Žr., pavyzdžiui, 71 pav., *g*. **6.** 0. **7.** 1) $\overrightarrow{AS}$; 2) $\overrightarrow{AB}$. **8.** Remdamiesi daugiakampio taisykle, kiekvieną sumą užrašykite šitaip: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **9.** Taip. **10.** a) $AC=\mathbf{b}$; b) $\overrightarrow{CA}$; c) $\mathbf{0}$; d) $\mathbf{0}$; **12.** $\mathbf{b}-\mathbf{a}$; $0{,}5\,(\mathbf{a}-\mathbf{b})$; $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; $-0{,}5\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

13. $\mathbf{b}-\mathbf{a}$; $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; $\mathbf{b}-2\mathbf{a}$; $\mathbf{a}-0{,}5\mathbf{b}$; $\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

14. $2\mathbf{a}+2\mathbf{b}-0{,}5\mathbf{c}$; $\mathbf{a}+\mathbf{b}-0{,}5\mathbf{c}$; $-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

15. $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CB}$. **19.** 7.

20. 1) $k=\pm 1$; 2) $|k|>1$; 3) $|k|<1$.

22. 1) $k=\pm 1$; 2) $|k|>3$; 3) $|k|<5$.

23. 1) $\dfrac{5}{|\mathbf{a}|}$; 2) $-\dfrac{1}{|\mathbf{a}|}$. **24.** $-0{,}5\,\overrightarrow{PM}$.

25. 1) $\pm\dfrac{1}{|\mathbf{a}|}$; 2) $\dfrac{5}{|\mathbf{a}|}$. **26.** $-2\overrightarrow{CB}$. **27.** Galima naudotis 23 paragrafo formule: $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\,(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, imant $O=M$.

28. $\mathbf{b}-\mathbf{a}$; $-\mathbf{a}$; $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; $\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

29. $\mathbf{b}=(-3;\ 0;\ \pm 2\sqrt{5})$.

30. 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BA}$.

32. $B\,(11;\ 1)$. **33.** -6. **34.** -14.

35. $\cos\varphi=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **36.** 9.

37. $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$; $-\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

38. 90°. **39.** 2. **40.** Begalinė aibė.

42. $\left(-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{2}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$. **43.** $8\mathbf{i}+6\mathbf{j}$.

44. $\overrightarrow{OE}=4\mathbf{i}$; $\overrightarrow{OA}=-2\mathbf{i}+2\sqrt{3}\,\mathbf{j}$; $\overrightarrow{AB}=2\mathbf{i}+2\sqrt{3}\,\mathbf{j}$; $\overrightarrow{OB}=4\sqrt{3}\,\mathbf{j}$; $\overrightarrow{BC}=4\mathbf{i}$; $\overrightarrow{CD}=2\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{j}$; $\overrightarrow{DE}=-2\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{j}$; $\overrightarrow{OC}=4\mathbf{i}+4\sqrt{3}\,\mathbf{j}$; $\overrightarrow{OD}=6\mathbf{i}+2\sqrt{3}\,\mathbf{j}$.

45. 1) $8\mathbf{j}$; 2) $6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$; 3) $6\mathbf{i}$; 4) $6\mathbf{i}$; 5) $-6\mathbf{i}$; 6) $-6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$.

46. 1) $-\mathbf{a}-\mathbf{b}+0{,}5\mathbf{c}$; 2) $-\mathbf{a}+\mathbf{c}$; 3) $0{,}5\mathbf{a}-0{,}5\mathbf{b}-\mathbf{c}$; 4) $0{,}5\mathbf{a}+0{,}5\mathbf{b}$; 5) $-\mathbf{a}$; 6) $\mathbf{a}-\mathbf{c}+\mathbf{b}$; 7) $-\mathbf{b}+\mathbf{c}$; 8) $-0{,}5\mathbf{a}-0{,}5\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

47. 1) $-0{,}5\mathbf{a}+0{,}5\mathbf{b}$; 2) $0{,}5(\mathbf{a}+\mathbf{b})$; 3) $\mathbf{a}$; 4) $0{,}5(\mathbf{a}-\mathbf{b})$; 5) $-0{,}5(\mathbf{a}+\mathbf{b})$; 6) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; 7) $1{,}5\mathbf{a}+0{,}5\mathbf{b}$; 8) $\mathbf{b}-\mathbf{a}$; 9) $-1{,}5\mathbf{a}-0{,}5\mathbf{b}$; 10) $2\mathbf{a}$.

48. 7. **49.** -1; $-0{,}5$.

50. 1) 0°; 2) 90°; 3) 90°; 4) 90°; 5) 90°; 6) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

51. 1) 90°; 2) $0°\leqslant\varphi<90°$; 3) $90°<\varphi\leqslant180°$; 4) $-\mathbf{a}^2$; 5) $k\mathbf{a}^2$.

52. 45°. **53.** $2\sqrt{3}$. **54.** 6.

55. 1) 90°; 2) 90°; 3) $\cos\varphi=-\frac{3}{\sqrt{13}}$.

56. 90°, 45°, 45°. **59.** 5. **61.** 6. **62.** −6.

63. $\cos\varphi=0{,}6$. **64.** $\cos\varphi=0{,}6$.

65. 1) $(\mathbf{b}+\mathbf{c})^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$; 2) $2\mathbf{i}$.

66. 1) $-4\mathbf{i}+7\mathbf{j}+6\mathbf{k}$; $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$; 3) $-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$; 4) $3\mathbf{i}+6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; 5) $-2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; 6) $4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$; 7) $4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$; 8) $5\mathbf{i}+10\mathbf{j}+5\mathbf{k}$; 9) $20\mathbf{i}+10\mathbf{j}+20\mathbf{k}$; 10) $20\mathbf{i}+10\mathbf{j}+15\mathbf{k}$.

67. $-6\mathbf{j}$. **68.** $-12\mathbf{j}$. **69.** 7. **70.** $\sqrt{429}$.

71. 25. **72.** $7\sqrt{5}$. **73.** 48; 4,8; 9,6.

II SKYRIUS

1. Tiesė eina per taškus A (0; 3) ir B (2; 4).

2. $x=3+t$; $y=-2+3t$. **4.** $4x-y-11=0$.

6. $2x+5y-26=0$. **7.** $x-y-7=0$.

9. $3x-2y-13=0$. **10.** $4x+y-5=0$.

12. $x=3$. **14.** $2x+3y=0$.

15. $2x-y+5=0$ (AB), $2x+y-9=0$ (BC), $2x-5y-15=0$ (AC), $x-y=0$ (AA'), $10x-y-3=0$ (BB'), $2x+7y-3=0$ (CC').

16. $x=4$, $y=-3$. **17.** $x=5$, $y=-2$.

18. (4; 0), (0; −6).

19. 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; 2) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$; 3) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$; 4) $\frac{x}{-3}+\frac{k}{-2}=1$.

20. $x+3y+5=0$, $3x-y+5=0$, $3x-y-5=0$.

21. $S_\triangle=6$. **22.** $x+2y-4=0$. **23.** $x+y-6=0$.

24. $2x+y-8=0$. **25.** $S_\triangle=20$.

26. 1) $2x-3y-23=0$; 2) $3x+2y-2=0$.

27. $x-\sqrt{3}\,y+3+4\sqrt{3}=0$. **28.** $x-y+2=0$.

29. $k=3/7$; $b=2/7$. **30.** $4x-3y-27=0$.

31. $2x-3y+4=0$. **32.** $2x-3y=0$.

33. $3x-5y-27=0$. **34.** Pirmoji tiesė.

35. $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$, $b=3{,}25$.

37. 1) $k=3/4$; 2) $k=-4/3$.

38. $k=-5/3$, $\alpha\approx121°$. **39.** 135°.

40. 1) $k=1{,}5$, $b=4$; 2) $k=3$, $b=3$; 3) $k=-1$, $b=3$.

41. 1) $3x-4y+8=0$; 2) $y=2x-3$; 3) $5x+y+3=0$; 4) $3x+2y-10=0$.

42. $k=0{,}2$. **43.** $y=5x+9$.

44. 1) 135°; 2) 45°; 3) 0°; 4) $\operatorname{tg}\alpha=7/9$; 5) 90°; 6) 0°; 7) 90°; 8) $\operatorname{tg}\alpha=-5$; 9) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b^2-a^2}{2ab}$. **46.** $l_1\perp l_2$, $l_2\parallel l_4$.

47. 1) $0{,}6x-0{,}8y-5=0$; 4) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$.

49. 1) 2,5; 2) 3; 3) 6,5.

50. 1) $4x-3y=0$; 2) $4x-3y-30=0$.

51. $(-3;\ 1)$. **52.** 1) $2x+5y-4=0$; 2) $2x+5y+25=0$.

53. $|d|=\frac{6}{\sqrt{13}}$. **54.** $(3;\ 2)$. **55.** $x+y-4=0$.

56. a) l_1 sutampa su l_2; b) $(4;\ -4)$; c) $l_1 \| l_2$; d) $l_1 \| l_2$.

57. $(1;\ 3)$, $(2;\ 1)$, $(5;\ 4)$, $(6;\ 2)$.

58. $5x+4y-23=0$. **59.** $|d|=\frac{8}{\sqrt{13}}$.

60. $\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y\pm 3=0$. **61.** $12x-18y+83=0$. **62.** $(2;\ 3)$.

63. $\left(\frac{11}{6};\ \frac{35}{6}\right)$, $(-3;\ 1)$, $\left(9\frac{3}{7};\ -9\frac{5}{14}\right)$.

64. $(-2;\ 5)$, $(1;\ -3)$, $(5;\ -9)$, $(8;\ -17)$.

65. 1) $(3;\ 2)$; 2) $(4;\ 3)$; 3) $(2;\ 5)$.

66. $3x-y-2=0$ (MP); $x-5y+4=0$ (NE); $x+3y-12=0$ (ND).

67. $N(3;\ -1)$, $M\left(4\frac{1}{3};\ -2\right)$, $P\left(2\frac{2}{3};\ -2\right)$. **68.** $x-y-17{,}5=0$.

III SKYRIUS

1. $x^2+y^2=16$. **2.** $x^2+y^2=9$.

3. $(x-5)^2+y^2=9$. **4.** $(x-2)^2+(y\pm 3)^2=9$.

5. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

6. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$. **7.** $(x-1{,}5)^2+(y-2)^2=6{,}25$.

8. $\left(-\frac{19}{25};\ 6\frac{17}{25}\right)$, $(-2;\ -2)$.

9. $(x-3)^2+(y-7)^2=49$. **10.** $(x-2)^2+(y-3)^2=4$.

11. $(x+1)^2+(y+1)^2=5{,}76$.

12. 1) apskritimą, $C(3;\ -5)$ ir $R=5$; 2) tašką $(-5;\ 4)$; 3) apskritimą, $C(1;\ -2)$ ir $R=5$; 4) apskritimą, $C(3;\ 0)$ ir $R=3$; 5) apskritimą, $C(0;\ 2)$ ir $R=\sqrt{7}$; 6) apskritimą, $C(0;\ -0{,}5)$ ir $R=0{,}5$.

13. 1) apskritimo išorėje; 2) priklauso apskritimui; 3) apskritimo viduje; 4) apskritimo išorėje; 5) apskritimo viduje; 6) apskritimo išorėje.

14. 8. **15.** $3x-4y=0$. **16.** $3x+2y-6=0$.

17. $(x-5)^2+(y+2)^2=1$. **18.** $(x-6)^2+(y-6)^2=25$.

19. $(x+2)^2+y^2=4$; $(0;\ 0)$, $(-2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$.

20. $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$. **21.** $(x+2)^2+(y+1)^2=40$.

22. 1) kerta; 2) liečia; 3) apskritimo nekerta.

23. 1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 5) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **24.** 1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$; 3) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$; 4) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; 5) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$.

25. 1) $a=4$, $b=3$, $(4;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $(0;\ 3)$, $(0;\ -3)$, $F_1(\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{7};\ 0)$; 2) $a=3$, $b=4$, $(3;\ 0)$, $(-3;\ 0)$, $(0;\ 4)$, $(0;\ -4)$, $F_1(0;\ \sqrt{7})$, $F_2(0;\ -\sqrt{7})$; 3) $a=\frac{3}{2}$, $b=3$, $\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$, $(0;\ 3)$, $(0;\ -3)$, $F_1\left(0;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

$F_2\left(0;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $a=2$, $b=\frac{2}{3}$, $(2;\ 0)$, $(-2;\ 0)$, $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(0;\ -\frac{2}{3}\right)$, $F_1\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$; 5) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $(0{,}5;\ 0)$, $(-0{,}5;\ 0)$, $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$, $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6};\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6};\ 0\right)$; 6) $a=2$, $b=1$, $(2;\ 0)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$, $F_1(\sqrt{3};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{3};\ 0)$.

26. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. **27.** $2a=10$, $2b=6$, $2c=8$, $F_1(4;\ 0)$, $F_2(-4;\ 0)$, $\varepsilon=\frac{4}{5}$.

29. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **30.** $4\sqrt{3}$. **31.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. **32.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

33. $2a=14$, $2b=10$, $F_1(2\sqrt{6};\ 0)$, $F_2(-2\sqrt{6};\ 0)$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

34. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **35.** $\left(-3;\ \frac{8}{5}\right)$, $\left(-3;\ -\frac{8}{5}\right)$. **36.** $S=24$. **37.** $x^2+3y^2-16=0$.

38. 3 ir 7. **39.** $\left(\frac{\sqrt{21}}{2};\ 2\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2};\ 2\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}}{2};\ -2\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2};\ -2\right)$.

40. $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. **41.** $\frac{x^2}{(25/4)^2}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$ arba $\frac{x^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$, priklausomai nuo to, kuri elipsės ašis, – didžioji ar mažoji – yra lygiagreti abscisių ašiai.

42. $\frac{(x-5)^2}{320/11}+\frac{(y-8)^2}{64}=1$. **44.** $3x-y-12=0$. **45.** $(4;\ -5)$.

47. $\frac{(x-5)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$.

48. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; 6) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

49. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=-1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 3) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; 4) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$.

50. 1) $a=4$, $b=3$; 2) $a=0{,}25$, $b=1$; 3) $a=3$, $b=1$; 4) $a=0{,}25$, $b=1/3$; 5) $a=2$, $b=2$; 6) $a=4$, $b=3$.

51. 1) $a=4$, $b=3$; 2) $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$; 3) $(4;\ 0)$, $(-4;\ 0)$; 4) $y=\pm 0{,}75x$.

52. 1) $b=4$, $a=3$; 2) $(0;\ 4)$, $(0;\ -4)$; 3) $F_1(0;\ 5)$, $F_2(0;\ -5)$; 4) $y=\pm 0{,}75x$.

54. $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$. **55.** $x=5$; $x=-5$. **56.** $F_1(5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$, $(4;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $\varepsilon=1{,}25$, $y=\pm 0{,}75x$. **57.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$. **58.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. **59.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$.

60. $a=b$. **61.** 1) ne; 2) $\left(-1+3\sqrt{3};\ \frac{-9+3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(-1-3\sqrt{3};\ \frac{-9-3\sqrt{3}}{4}\right)$; 3) $(5;\ 2{,}25)$ (lietimosi taškas). **63.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **64.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. **67.** $\sqrt{2}$.

68. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **69.** $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$. **70.** $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$.

71. 1) $x^2=8y$; 2) $x^2=-12y$; 3) $y^2=6x$; 4) $y^2=-10x$.

72. $x^2=-12y$. **73.** $y^2=-24x$. **74.** $x^2=16y$. **75.** $x^2=\frac{3}{2}y$.

76. 1) $(0;0)$, $(5;0)$, 2) $(0;0)$, $(0;3)$, 3) $(0;0)$, $(-2{,}5;0)$; 4) $(0;0)$, $(0{,}25;0)$; 5) $(0;0)$, $(0;-1)$; 6) $(0;0)$, $(0;0{,}25)$.

78. $x^2=y$. **79.** $y^2+9x-36=0$. **80.** $y^2=16x$.

81. $y^2=1{,}8x$. **82.** $y^2=8x$. **83.** $y^2=-12(x-3)$.

84. $y^2=4x$. **85.** $(y-5)^2=8(x+4)$.

86. $(y+4)^2=-4(x+2)$. **87.** 1) $(0;0)$, $(4;4)$; 2) $(0;0)$, $(-4;4)$; 3) $(4;4)$, $(-2;1)$; 4) $(2;1)$, $(8;16)$.

88. $(4;2)$. **89.** $\left(\frac{11}{4};\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{4};\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$.

90. $x^2=5y$; $y+1{,}25=0$. **91.** $(x-2)^2=16(y-5)$; $(-6;9)$, $(10;9)$.

92. $x-2y+6=0$. **93.** $90y=x^2$. **94.** $(x-2)^2+y^2=16$; $(2;4)$, $(2;-4)$.

2 DALIS I SKYRIUS

1. 210. **2.** -50. **3.** Nekomplanarūs, dešininę sistemą. **4.** Komplanarūs. **6.** Taip. **7.** 0. **9.** Nėra. **10.** 27 kub. v. **11.** $4|(a;\ b;\ c)|$.

14. $(AC_1): \overrightarrow{AM}=t_1(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3),\ t_1\in R;$

$(CA_1): \overrightarrow{CM}=t_2(-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3),\ t_2\in R;$

$(BD_1): \overrightarrow{BM}=t_3(-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3),\ t_3\in R;$

$(DB_1): \overrightarrow{DM}=t_4(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3),\ t_4\in R;$

$(CD_1): \overrightarrow{CM}=t_5(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1),\ t_5\in R.$

15. $x=1+2t,\ y=2-2t,\ z=3+t$. **16.** $\frac{x-3}{-5}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{4}$. **17.** $x=-7+8t$, $y=11-9t$, $z=6-12t$. **18.** Galima. **19.** $2x-5y-1=0$. **20.** 2. **21.** $2x+3y-13=0$. **22.** $4x-6y+z-40=0$. **23.** $7y-4z=0$. **24.** $7x+5y-3z+18=0$. **25.** Plokštuma Oxz. **26.** $z+11=0$. **27.** 3. **28.** $\frac{6}{\sqrt{29}}$. **30.** Ne. **31.** $4x-7z+24=0$. **32.** a) taip; b) ne; c) taip. **33.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$. **34.** a) $\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y+\frac{7}{3}}{-3}=\frac{z}{-3}$; b) $\frac{x-\frac{3}{2}}{0}=\frac{y+5}{0}=\frac{z}{2}$; c) $-x=y=z$; d) $\frac{x+\frac{3}{11}}{0}=\frac{y-\frac{15}{11}}{0}=\frac{z}{11}$; e) $\frac{x}{7}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$; f) $\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-6}$. **35.** $\begin{cases}2x-3y+11=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-4z+11=0,\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}3y+4z+11=0,\\ x=0.\end{cases}$

36. $2x+15y+7z+7=0$. **37.** $5x+5z-8=0$. **38.** Taip. **39.** $m=0$. **40.** $\frac{\pi}{2}$. **41.** $5y+3z+7=0$. **42.** $8x-2y-5z-23=0$. **43.** $2x+3y+z-11=0$. **44.** -3. **45.** Nėra. **46.** Taip. **47.** a) $x=2+2t,\ y=-1+7t,\ z=4t$; b) $x=3+t,\ y=2+2t,\ z=t$. **48.** Taip. **49.** Ne. **50.** a) $\alpha=0,\ \beta=0$; b) α ir β kartu nelygūs nuliui. **51.** Taip. **52.** Ne. **53.** a) 60°; b) 90°. **54.** Taip. **55.** $a_1=2$. **56.** $\begin{cases}x=0,\\ \frac{y}{1}=\frac{z}{-\frac{2}{3}}.\end{cases}$

57. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{1}$. **58.** a) lygiagrečios; b) prasilenkiančios; c) susikertančios. **59.** a) yra; b) nėra. **60.** Tiesė lygiagreti plokštumai. **61.** $c=-2$. **63.** $\lambda=$

$=\frac{5a+4b+4c}{3a}$, $a\neq 0$. **66.** $\sin\varphi=\frac{11}{7\sqrt{3}}$. **68.** $A=3$, $D=-23$. **69.** $3x-2y-4z-7=0$. **71.** Tiesė ir plokštuma susikerta taške (0; 0; -2). **72.** Tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios. **73.** a) tiesė lygiagreti plokštumai; b) tiesė yra plokštumoje. **74.** Ne, ne visada. **76.** $m\sqrt{\cos\alpha}$. **82.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **87.** $\frac{3}{8}ah$. **88.** 45°, 135°. **90.** Trikampis ABC yra statusis. **92.** $\frac{3}{16}m^2$. **93.** $1{,}17\sqrt{5}$ cm². **94.** $\sqrt{61}\approx 7{,}8$ (N). **95.** 63,4 m. **96.** $\frac{1}{3}$ kub. v. **97.** $\frac{\pi(d_2^2-d_1^2)\sqrt{2}}{4}$.

II SKYRIUS

3. $\approx 17{,}1$ cm, $\approx 20{,}1$ cm. **4.** 6 cm ir 3 cm arba 4 cm ir 7 cm. **5.** 4 m, 8 m ir 12 m. **6.** 50 m². **7.** $\sqrt{102}\approx 10{,}1$ cm. **8.** 256 cm². **9.** 32 cm. **13.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **15.** Tetraedras ir kubas. **16.** Ikosaedras. **17.** $\arccos\frac{1}{3}$. **18.** $2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

III SKYRIUS

1. a) apskritąjį cilindrinį paviršių; cilindrinio paviršiaus ašis sutampa su ašimi Oz, $R=5$; b) sfera, kurios centras yra koordinačių pradžia ir spindulys $R=5$; c) elipsinį cilindrą, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz; d) hiperbolinį cilindrą, kurio sudaromosios lygiagrečios ašiai Oz. **2.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{16}=1$. **3.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$. **4.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{14}+\frac{z^2}{25}=1$. **5.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{36}=1$. **6.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$. **7.** $y^2+z^2=2x$. **8.** $4x^2-9y^2-9z^2=0$. **9.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$. **10.** $x^2+y^2=6z$. **11.** $x^2+y^2=9$. **12.** Sukimosi paraboloidas; jo ašis Ox. **13.** Dvišakis sukimosi hiperboloidas, hiperbolė. **14.** Vienašakis sukimosi hiperboloidas, hiperbolė. **15.** Sukimosi paraboloidas, parabolė. **16.** 90πm². **17.** Antrojo. **18.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$, $C(2;\ 3;\ 4)$. **19.** $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2{,}5)^2=49{,}25$. **20.** $(-5;\ 2;\ 5)$. **21.** $x^2+y^2+z^2=93$. **22.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=9\pm\sqrt{6}$. **23.** $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-0{,}5)^2=2{,}25$, $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1{,}5)^2=72{,}25$, $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-4{,}5)^2=30{,}25$, $(x-5)^2+(y+2)^2+(z+2{,}5)^2=20{,}25$. **24.** $(x-8)^2+(y+5)^2+(z-5)^2=11$. **25.** $x^2+y^2+z^2=36$. **26.** $x^2+y^2+z^2=9$. **27.** Taškas A yra sferos viduje, taškas B priklauso sferai, taškas C yra sferos išorėje. **28.** a) sferą, kurios centras yra koordinačių pradžia ir $R=3$; b) sferą, kurios centras $C(0;\ 0;\ 3)$ ir $R=3$; c) sferą, kurios centras $C(0;\ 2;\ 0)$ ir $R=3$; d) sferą, kurios centras $C(1;\ -2;\ 3)$ ir $R=4$.

IV SKYRIUS

1. $V_1+0{,}5V_2$ (arba $V_2+0{,}9V_1$). Nurodymas. $V(\Phi_1\cup\Phi_2)=V(\Phi_1)+V(\Phi_2)-V(\Phi_1\cap\Phi_2)$. **2.** $\Phi_2\subset\Phi_1$, $\Phi_1\subset\Phi_2$. **3.** 0,5. **4.** $0{,}5V$. **5.** $0{,}5V$. **6.** $\frac{l^3}{3\sqrt{3}}$. **7.** $a^2\sqrt{l^2-2a^2}$. **9.** 105 cm³. **10.** $216\sqrt{2}\approx 306$ cm³. **11.** $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. **12.** $\frac{d^3\sqrt{3}}{2}$. **13.** $3\sqrt{3}\approx 5{,}2$ m³. **14.** 3360 cm³. **15.** 144 cm³. **16.** 360 cm³. **17.** 312 cm³.

18. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **19.** 8 m². **20.** $\frac{2a}{3}$ ir $\frac{a}{6}$. **21.** 57,6 cm³. **22.** 3 cm. **23.** 32 m; 34 m. **24.** 6 m³. **25.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **26.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4\sin\alpha}\sqrt{\cos(30°-\alpha)\cos(30°+\alpha)}$. **27.** $12\sqrt{7}\approx 31{,}7$ cm³. **28.** $\frac{75\sqrt{3}}{4}\approx 32{,}5$ cm³. **29.** $\frac{1}{2}Q\sqrt{S\sin 2\alpha}$. **30.** $Q\sqrt{\frac{Q}{3}}$. **31.** ≈ 170. **32.** 4 m× ×4 m×2 m, 1200. **33.** 16π cm³. **34.** $128\pi\sqrt{3}$ cm³. **35.** $C\cdot S$. **36.** $\frac{N}{2}\sqrt{\pi M}$. **37.** $\frac{\pi dS}{\sin\alpha}$. **38.** $\approx 1{,}9$ kg. **39.** 1300 m³; 7,5 %. **40.** a) $18{,}4\pi$; b) $0{,}8\pi$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $0{,}3\pi$; e) 12π; f) $\frac{\pi^2}{2}$; g) $\frac{\pi^2}{6}$; h) $\frac{1}{3}(a^3+3a^2+6)\pi$. **41.** 240 cm³. **42.** $252\sqrt{3}\approx$ $\approx 436{,}5$ dm³. **43.** 3060 cm³. **44.** $2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$. **45.** $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$.

46. $\approx 14{,}9$ dm³. **47.** $18\sqrt{39}\approx 112$ cm³. **48.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

49. 192 cm³. **50.** $2\sqrt{3}\approx 3{,}5$ m³. **52.** 122,4 cm³. **53.** $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha<\frac{\pi}{2}$.

54. $\frac{a^3}{6}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **55.** $\frac{1}{3}a^2h\sin\alpha$. **56.** $\frac{1}{3}h^2H\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. **57.** $\frac{1}{3}S\sqrt{2S\sqrt{3}}$.

58. $\approx 2{,}6$ mln. m³. **59.** $\approx 1{,}7$ cm. **60.** $\frac{abc}{3}\sqrt{2}$. **61.** 1900 m³. **62.** 5600 cm³.

63. 2100 cm³. **64.** $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **65.** $\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

66. $\pi\sqrt{3}$ cm³. **67.** $9\pi\sqrt{3}$ cm³. **68.** $3\pi\sqrt{3}$ cm³. **69.** $18\pi\sqrt{3}$ cm³.

70. $\frac{2\pi d^3}{3\sin 2\varphi\sin\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **71.** 320π cm³. **72.** $4{,}5\pi\sqrt{2}$ cm³. **73.** 448π dm³.

74. $\frac{2}{3}\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}$. **75.** $\frac{1}{12}\pi a^3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$. **76.** $\frac{4}{3}\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}$. **77.** $\frac{1}{3}\pi m^3\sin^2\beta$.

78. ≈ 19 t. **79.** $\approx 1{,}6$ m. **80.** 182π dm³. **81.** $10\,500\pi$ cm³. **82.** 1946π cm³.

83. $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **84.** $\pi d^3\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. **85.** 2 %. **86.** Rutulio tūris didesnis.

87. Rutulio modelis lengvesnis. **88.** 3 : 1. **89.** 20 : 7. **90.** 5 : 27. **91.** $\frac{166\,912}{3}\pi$ cm³.

92. $\frac{\pi}{3}R^3$. **93.** $\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **94.** $4\sqrt{3}\pi$ dm³. **95.** 3 : 1. **96.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ m³.

97. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}\,\mathrm{tg}^3\,\frac{\varphi}{2}$. **98.** $\frac{3V\sqrt{2}}{8\pi}\sin 2\alpha$. **99.** $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^3 2\alpha\cos^2\alpha$.

100. $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\varphi\sin^2\varphi\sin 2\alpha$. **101.** $\frac{\pi}{6}a^3\left(\frac{\sqrt{3\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{3}+3\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}}\right)^3$. **102.** $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{\pi}}\times$ $\times\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **103.** $\frac{s^3\sqrt{2}\sin\alpha}{8\sin^5\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. **104.** $\frac{r^3}{3}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$.

105. $\frac{\pi a^3\sqrt{-\cos 2\alpha}}{24\cos\alpha}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. **106.** 4 m×4 m×2 m. **107.** 2600 m³, 52 cis-

ternas. **108.** 2 %. **109.** 1) 410 m^3, 2) 6,1 atm. **110.** $\frac{224\pi}{3} \approx 230$ (cm^3). **111.** 2,3 % ir 1,3 %. **112.** πQ. **113.** $\frac{l^2 \cos\alpha (\cos\alpha + 2\pi \sin\alpha)}{2\pi}$. **114.** $\frac{\pi a}{2\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \times \left(a + 2H \sin \frac{\varphi}{2}\right)$. **115.** $25\sqrt{3}\pi$ $cm^2 \approx 136$ cm^2, $(25\sqrt{3} + 12{,}5)\pi$ $cm^2 \approx 175$ cm^2. **116.** ≈ 35 tūkst. m^2. **117.** $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$, $\pi a^2 \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **118.** $\frac{\pi d^2 \sin 2\beta}{2\cos\alpha}$. **119.** $\pi h^2 \operatorname{ctg}\varphi$. **120.** $2\pi h^2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **121.** $12\pi a^2$. **122.** $\pi l^2 \sin\frac{\varphi}{2}$, $\pi l^2 \sin\frac{\varphi}{2}\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)$. **123.** $\pi l\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$, $\pi l\sqrt{\frac{Q}{\pi}} + Q$. **124.** ≈ 40 lapų. **125.** $\frac{1}{2}\pi a^2(3+\sqrt{3})$. **126.** $\frac{\pi b^2 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$. **127.** $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$. **128.** $8\pi a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}$. **129.** $2\pi a(a+b)\sin\alpha$. **130.** ≈ 85 cm; ≈ 61 cm; $\approx 57°$; ≈ 21 dm^3. **132.** $\approx 11{,}5$ mln. km^2. Nurodymas. Matomą Žemės paviršių reikia laikyti sferinės nuopjovos paviršiumi. **133.** $2\arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 48°$. **134.** ≈ 4 kartus. **135.** $\frac{S}{\sin^2\alpha}$. **136.** $4\pi R^2 \sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$. **137.** a) $\frac{61\pi}{1728}$; b) $\frac{2\pi p^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; c) $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13} + 2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$; d) $2\pi\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$; e) $4\pi^2 ab$; f) $\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)\right)$; g) $\frac{12}{5}\pi a^2$; h) $3{,}3\pi$; i) $\frac{128}{5}\pi$.

VARTOJAMŲ SIMBOLIŲ RODYKLĖ

A, B, C, M, N, P — taškai
$(A; B)$ — sutvarkyta taškų pora
$a, l, m, n, (AB)$ — tiesės
Φ, Γ — figūros
$\varnothing$ — tuščioji aibė
$[a; b], [AB]$ — atkarpos
$|AB|$ — atkarpos AB ilgis (atstumas tarp taškų A ir B)
$[AB)$ — spindulys AB
$]a; b[$ — intervalas $\{A; B\}$ — aibė, kurios elementai A ir B
$\mathbf{a}, \overrightarrow{AB}$ — vektoriai
$|\mathbf{a}|, |\overrightarrow{AB}|$ — vektoriaus ilgis
$\mathbf{0}, \overrightarrow{AA}$ — nulinis vektorius
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — vienetiniai vektoriai
$\mathbf{a}=(x; y; z)$ — vektorius, kurio koordinatės x, y, z
$M(x; y; z)$ — taškas, kurio koordinatės x, y, z
$\uparrow\uparrow$ — vienakrypčiai spinduliai (vektoriai)
$\uparrow\downarrow$ — priešingos krypties spinduliai (vektoriai)
f — transformacija
E — tapačioji transformacija
f^{-1} — atvirkštinė transformacija
$f_2 \circ f_1$ — transformacijų f_1 ir f_2 kompozicija
$\in$ — priklausymo ženklas
$M \in \Phi$ — taškas M priklauso figūrai Φ.
$\notin$ — nepriklausymo ženklas
$M \notin \Phi$ — taškas M nepriklauso figūrai Φ
$\subset$ — įeities ženklas
$\Phi_1 \subset \Phi_2$ — figūra Φ_1 yra figūros Φ_2 poaibis (dalis)
$\not\subset$ — neįeities ženklas
$\Phi_1 \not\subset \Phi_2$ — figūra Φ_1 nėra figūros Φ_2 poaibis (dalis)
$\cap$ — sankirtos ženklas
$\Phi_1 \cap \Phi_2$ — figūrų Φ_1 ir Φ_2 sankirta
$\cup$ — sąjungos ženklas
$\Phi_1 \cup \Phi_2$ — figūrų Φ_1 ir Φ_2 sąjunga
$=$ — lygybės ženklas
$\Phi_1 = \Phi_2$ — figūros Φ_1 ir Φ_2 sutampa
$\neq$ — nelygybės ženklas
$\Phi_1 \neq \Phi_2$ — figūros Φ_1 ir Φ_2 yra skirtingos
$\parallel$ — lygiagretumo ženklas
$l_1 \parallel l_2$ — tiesės l_1 ir l_2 yra lygiagrečios
$\sigma_1 \parallel \sigma_2$ — plokštumos σ_1 ir σ_2 yra lygiagrečios
$l \parallel \sigma$ — tiesė l yra lygiagreti plokštumai σ
$\not\parallel$ — nelygiagretumo ženklas
$l_1 \not\parallel l_2$ — tiesės l_1 ir l_2 nėra lygiagrečios
$\perp$ — statmenumo ženklas
$l_1 \perp l_2$ — tiesės l_1 ir l_2 statmenos viena kitai
$\sigma_1 \perp \sigma_2$ — plokštumos σ_1 ir σ_2 statmenos viena kitai
$l \perp \sigma$ — tiesė l statmena plokštumai σ
$l_1 \dot{-} l_2$ — tiesės l_1 ir l_2 yra prasilenkiančios
$\angle$ — kampo ženklas
$\angle ABC$ — kampas ABC
$\angle a, \angle \alpha a \beta$ — dvisienis kampas, kurio briauna a, o sienos α ir β
$\widehat{ABC}$ — kampo ABC didumas
$\widehat{\alpha a \beta}$ — dvisienio kampo didumas
$\widehat{(l_1; l_2)}$ — kampas tarp tiesių l_1 ir l_2
$\widehat{(\sigma_1; \sigma_2)}$ — kampas tarp plokštumų σ_1 ir σ_2
$\widehat{(a; \sigma)}$ — kampas tarp tiesės a ir plokštumos σ
$\widehat{(\mathbf{a}; \mathbf{b})}$ — kampas tarp vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$
$\widehat{((CD); (AB))}$ — kampas tarp tiesių CD ir AB
$\cong$ — kongruentumo ženklas
$\Phi_1 \cong \Phi_2$ — figūros Φ_1 ir Φ_2 yra kongruenčios
$\sim$ — panašumo ženklas
$\Phi_1 \sim \Phi_2$ — figūros Φ_1 ir Φ_2 yra panašios
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ skaliarinė sandauga
$[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ — vektorių $\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b}$ vektorinė sandauga
$(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c})$ — vektorių $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ir $\mathbf{c}$ mišrioji sandauga
$S_{\triangle}$ — trikampio plotas
$\int_a^b$ — apibrėžtinio integralo ženklas
$\int_a^b f(x)\,dx$ — funkcijos $f(x)$ apibrėžtinis integralas atkarpoje $[a; b]$

DALYKINĖ RODYKLĖ

Adityvumas tūrio 194
Aibė aprėžtoji 174
— atviroji 174
— iškiloji 174
— uždaroji 174
Apotema piramidės 171
— — taisyklingosios nupjautinės 172
Apskritimas 77
Asimptotė hiperbolės 97
Ašis 17
— abscisių 25
— aplikačių 25
— elipsės didžioji 86
— — mažoji 86
— hiperbolės realioji 97
— — simetrijos menamoji 97
— — — realioji 97
— koordinačių 25
— ordinačių 25
— polinė 28
— simetrijos 6
Atkarpa kryptinė 9
Atstumas nuo taško iki plokštumos 149
— tarp taško ir tiesės 71
Atvaizdis tapatusis 6
Aukštinė cilindro 191
— kūgio 190
— — nupjautinio 191
— piramidės 171
— — nupjautinės 172
— prizmės 169

Bazė erdvės 24
— plokštumos 21
Briauna daugiasienio kampo 165
— piramidės šoninė 170
— prizmės pagrindo 169
— — šoninė 169
— trisienio kampo 165
Briaunainiai lygiatūriai 194
Briaunainis apibrėžtinis 197
— atviras iškilasis 174
— įbrėžtinis 197
— iškilasis 174
— iškilas taisyklingasis 174
— uždaras iškilasis 174

Centras apskritimo 77
— elipsės 86
— gretasienio simetrijos 170
— hiperbolės 97
— rutulio 179
— sferos 178
— taisyklingojo briaunainio 175
Cilindras apskritasis 191
— elipsinis 192
— status apskritasis (ritinys) 191

Darinys vektorių tiesinis 20
Daugiklis normuojantysis 70
Dydis kryptinis 9
Didumas dvisienio kampo 165
Direktrisė parabolės 104
Dodekaedras 177
— taisyklingasis 177

Ekscentricitetas elipsės 89
— hiperbolės 100
Elipsė 84
Elipsoidas sukimosi 182

Grafikas lygties 53
Gretasienis 169
— stačiakampis 170
— statusis 170

Heksaedras 175
— taisyklingasis (kubas) 175
Hiperbolė 94
— lygiaašė 101
— lygiašonė 101
Hiperboloidas sukimosi dvišakis 183
— — vienašakis 183

Ikosaedras 177
— taisyklingasis 177
Ilgis vektoriaus 9
Invariantiškumas tūrio 194
Išpjova rutulio antrojo tipo 209
— — pirmojo tipo 208
Įstrižainė prizmės 169

Kampai dvisieniai kryžminiai 177
Kampas daugiasienis 165
— — iškilasis 166
— — neiškilasis 166
— — taisyklingasis 166
— dvisienis 164
— — bukasis 165
— — ištiestinis 164

— — smailusis 165
— — statusis 165
— ketursienis 166
— plokščiasis daugiasienio kampo 166
— — trisienio kampo 165
— polinis 28
— tarp krypčių 19
— — plokštumų 130, 165
— — tiesės ir plokštumos 140, 147
— — tiesių 68, 134
— — vektorių 19
— tiesinis dvisienio kampo 165
— trisienis 165
Koeficientas tiesės krypties 66
Kompozicija transformacijų 7
Koordinatės polinės 28
— taško 25
— vektoriaus 21, 24
Kraštas aibės 174
Kreivė antrosios eilės 76
Kryptis vektoriaus 9
Kubas 170, 175
Kūgis 190
— apskritasis 76
— elipsinis 191
— nupjautinis 190
— status apskritasis 190
Kūnas kubuojamas 197
— leistinų lygiagrečiųjų pjūvių 197

Lygiagretumas plokštumų 125
— tiesės ir plokštumos 138
— tiesių 131
Lygtis apskritimo 78
— elipsės kanoninė 85
— hiperbolės kanoninė 95
— — lygiaašės asimptotinė 103
— linijos 54
— parabolės kanoninė 104
— plokštumos bendroji 124
— —, duotos tašku ir krypties vektoriais 122
— —, duotos tašku ir normalės vektoriumi 123
— —, duotos trimis taškais 121
— — normalinė 123
— tiesės ašinė 63
— — bendroji 59
— — kryptinė 67
— — normalinė 70
— — polinė 72
— — vektorinė parametrinė 56, 118
Lygtys apskritimo parametrinės 80
— elipsės parametrinės 91
— kreivės erdvėje parametrinės 189
— tiesės, duotos dviem taškais 120
— —, duotos tašku ir krypties vektoriumi 120
— — kanoninės 120
— — parametrinės 120

Monotoniškumas tūrio 194

Oktaedras 176
— taisyklingasis 176

Pagrindas cilindro 191
— kūgio 190
— nupjautinės piramidės 172
— nupjautinio kūgio apatinis 191
— — — viršutinis 190
— pasvirosios plokštumai 147
— piramidės 170
— prizmės 169
— statmens plokštumai 147
Parabolė 104
Paraboloidas sukimosi 183
Parametras parabolės židinio 105
Pasviroji plokštumai 147
Paviršius cilindrinis 184
— — apskritasis 184
— — elipsinis 184
— — hiperbolinis 189
— — parabolinis 184
— cilindro 191
— — šoninis 191
— kūginis 189
— kūgio šoninis 190
— prizminis begalinis 168
— prizmės šoninis 169
— rutulio 179
— — juostos 211
— sukimosi 181
Piramidė 170
— keturkampė 171
— — nupjautinė 172
— n-kampė 171
— — nupjautinė 172
— nupjautinė 172
— taisyklingoji 171
— — nupjautinė 172
— trikampė 171
— — nupjautinė 172
Pjūvis kūgio 76
— piramidės įstrižasis 171
Plokštuma piramidės įstrižoji 171
— prizmės įstrižoji 169
— projekcijų 151
— pusiaukampinė 177
— sferos liečiamoji 181
Plokštumos lygiagrečiosios 125
— statmenosios 130, 165
— susikertančios 128
Plotas cilindro šoninio paviršiaus 209
— daugiakampio projekcijos 157
— kūgio šoninio paviršiaus 209
— — viso paviršiaus 209
— nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus 210
— — — viso paviršiaus 210
— ritinio šoninio paviršiaus 209

— — viso paviršiaus 209
— rutulio juostos šoninio paviršiaus 212
— — nuopjovos paviršiaus 213
— sferos 213
— stataus apskritojo kūgio šoninio paviršiaus 209
— — — — viso paviršiaus 209
— — — nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus 210
— — — — — viso paviršiaus 210
— sukimosi paviršiaus 211
— taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus 172
Pluoštas plokštumų 129
Polius 28
Poslinkis 6
Postūmis lygiagretusis 6
Posūkis apie centrą 6
Požymis komplanarumo vektorių 116
— lygiagretumo plokštumų 126
— — tiesės ir plokštumos 139
— — tiesių 132
— statmenumo plokštumų 144
— — tiesės ir plokštumos 143
— — tiesių 135
Pradžia koordinačių 25
Prizmė 169
— begalinė 168
— keturkampė 169
— *n*-kampė 169
— pasviroji 169
— penkiakampė 169
— stačioji 169
— taisyklingoji 169
— trikampė 169
Projekcija figūros 153
— kabinetinė 154
— pasvirosios 148
— taško statmenoji 151
— tiesės statmenoji 151
— vektoriaus skaliarinė 18
— — vektorinė 17
Pusašė elipsės 86
— hiperbolės menamoji 97
— — realioji 97
Puserdvė 164
— atviroji 164
Pusplokštumė 163
— atviroji 163

Ritinys 191
Rutulys 179

Sandauga vektoriaus ir skaičiaus 15
— vektorių mišrioji 115
— — skaliarinė 32
— — vektorinė 45
Sfera 178
Siena daugiasienio kampo 166
— trisienio kampo 165
— šoninė piramidės 170
— — prizmės 169
Simetrija ašinė 6
— centro atžvilgiu 6
Sistema Dekarto koordinačių 25
— stačiakampių Dekarto koordinačių erdvėje 26
— — — — plokštumoje 27
— vektorių 22
— — komplanari 22
Skersmuo sferos 178
Skirtumas vektorių 14
Sluoksnis rutulio 206
Spindulys elipsės židininis 84
— hiperbolės židininis 94
— polinis 28
— rutulio 179
— sferos 178
— vektorius 25
Statmenumas pokštumų 130, 165
— tiesės ir plokštumos 142
— tiesių 135
Statmuo plokštumai 147
Sudaromoji cilindrinio paviršiaus 184
— kūginio paviršiaus 189
Suma vektorių 10, 11
Suspaudimas plokštumos tiesės atžvilgiu 93

Taisyklė daugiakampio 11
— gretasienio 22
— trijų taškų 10
— trikampio 10
Taškai, simetriški centro atžvilgiu 6
— — tiesės atžvilgiu 6
Taškas aibės kraštinis 174
Tetraedras 172
— taisyklingasis 172
Tiesės lygiagrečiosios 131
— prasilenkiančios 133
— statmenosios 135
— susikertančios 132
Transformacija erdvės 7
— tapačioji 7
Trejetas vektorių dešinysis 45
— — kairysis 45
Tūris briaunainio 194
— cilindro pasvirojo 203
— — stačiojo 197
— gretasienio stačiakampio 194
— — stačiojo 195
— kūgio 205
— — nupjautinio 205
— — stataus apskritojo 205
— — — — nupjautinio 205
— kūno 197
— — leistinų lygiagrečiųjų pjūvių 198
— — sukimosi 201
— piramidės 203
— — nupjautinės 204

— prizmės pasvirosios 203
— — stačiosios 196
— ritinio 198
— rutulio 207
— — išpjovos antrojo tipo 209
— — — pirmojo tipo 208
— — nuopjovos 207
— — sluoksnio 206
Vedamoji cilindrinio paviršiaus 184
— kūginio paviršiaus 189
Vektoriai kolinearieji 15
— komplanarieji 22
— plokštumos krypties 122
— priešingieji 14
Vektorius 8
— lygiagretus plokštumai 22
— nulinis 9
— plokštumos normalės 123
— tiesės krypties 53, 118
— — normalės (normalinis) 53
— vienetinis 17
— vietos 9
Viršūnė elipsės 86
— daugiasienio kampo 165
— hiperbolės 97
— kūginio paviršiaus 189
— kūgio 190
— piramidės 170
— trisienio kampo 165

Židinys elipsės 84
— hiperbolės 94
— parabolės 104

Ge 263 **Geometrija:** Vadovėlis spec. vid. m-kloms / M. Kačenovskis, J. Koliaginas, A. Kutasovas ir kt.— V.: Mokslas, 1981.— 232 p., brėž.— (Matematika technikumams).

Rodyklės: p. 228—232.

Vadovėlis susideda iš dviejų dalių. Pirmojoje dalyje nagrinėjami vektoriai plokštumoje ir erdvėje, jų savybės, veiksmai, taip pat tiesės ir antrosios eilės kreivės: apskritimas, elipsė, hiperbolė ir parabolė. Antrojoje nagrinėjamos tiesių ir plokštumų lygtys, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtis, briaunainių ir apvaliųjų kūnų bei jų paviršių savybės. Taip pat dėstomi tūrių ir plotų teorijos elementai.

4306020402

G $\frac{20201-136}{М\ 854(08)-81}$ 32—81

BBK 22.151
513(075)

Мечислав Игнатьевич Каченовский, Юрий Михайлович Колягин, Александр Дмитриевич Кутасов, Геннадий Лаврович Луканкин, Вачаган Арташесович Оганесян, Геннадий Николаевич Яковлев. Математика для техникумов. ГЕОМЕТРИЯ. На литовском языке. Перевели с русского издания 1978 г. Ромуальдас Пранович Кашуба и Пятрас Юозович Вашкас. Вильнюс, Мокслас, 1981.

Mečislovas Kačenovskis, Jurijus Koliaginas, Aleksandras Kutasovas, Genadijus Lukankinas, Vačaganas Oganesianas, Genadijus Jakovlevas. Matematika technikumams. GEOMETRIJA. Išvertė iš 1978 m. rusiškojo leidimo R. Kašuba ir P. Vaškas. Redaktorė E. Leikauskienė. Viršelio dailininkė L. Tulytė. Meninis redaktorius R. Kepežinskas. Techninė redaktorė A. Plauškienė. Korektorė A. Sidarkevičienė.

IB Nr. 1505, 1506

Duota rinkti 1981.01.08. Pasirašyta spausdinti 1981.07.21. Formatas 60×90[1]/16. Popierius — spaudos Nr. 2. Šriftas — 10 p. romaniškas. Spauda — iškilioji. 14,5 sp. l., 16,11 apsk. l. l. Tiražas 20.000 egz. Užsakymo Nr. 87. Kaina 65 kp. „Mokslas“, Vilnius, Žvaigždžių g. 23. Spaudė K. Poželos spaustuvė, Kaunas, Gedimino g. 10.